# Allgemeine Vektorräume - Lösung

**Selbsttest :** Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

| Wahr | Falsch | Aufgabe |
|---|---|---|
| ☒ | ☐ | $\mathbb{K}_{\leq 3} = \left\{\sum_{i=0}^{3} \lambda_i \ x^i \vert \lambda_i \in \mathbb{K}, \ x \in \mathcal{R}\right\}$, wobei $\mathcal{R}$ eine $\mathbb{K}$-Algebra ist. (Als $\mathbb{K}$-Algebra bezeichnet man eine V.R. über $\mathbb{K}$, der um eine V.R.-Struktur erhaltende Multiplikation erweitert wurde.) |
| ☐ | ☒ | Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-V.R. mit $m = dim(V) < \infty$ und $(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m)$ eine Basis von $V$. Dann existieren zu jedem Element $\nu \in V$ $\infty$-viele $\lambda_1, ..., \lambda_m$ so, dass $\nu = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ \vec{b}_i$ |
| ☒ | ☐ | Eine Menge von Vektoren $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}\}$ eines $\mathbb{K}$-V.R. heißt linear unabhängig falls : $\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + ... + \lambda_n \vec{v_n} = \vec{0} \ \Rightarrow \ \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \sigma$ wobei $\sigma$ das Nullelement der Addition des $\mathbb{K}$-V.R. ist. |
| ☒ | ☐ | Ein Vektorraum der Dimension $n$ hat genau $n$ Basiselemente |
| ☐ | ☒ | Jedes Erzeugendensystem ist eine Basis |

**1. Aufgabe :** Wir prüfen im Folgenden die Vektorraumeigenschaften :

(i) $((f \oplus g) \oplus h)(x) = (f \oplus g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$
$= f(x) + (g \oplus h)(x) = (f \oplus (g \oplus h))(x)$

(ii) Da $\mathbb{K}$ ein Körper ist existiert ein Element $\sigma \in \mathbb{K}$ so, dass für alle $x \in \mathbb{K}$ $\sigma + x = x + \sigma = x$ gilt. Damit ist die konstante Abbildung $0 : A \mapsto \sigma$ in $\mathbb{K}^A$.
Damit gilt : $(0 \oplus f)(x) = 0(x) + f(x) = \sigma + f(x) = f(x)$

(iii) Da $\mathbb{K}$ ein Körper ist existiert zu jedem Element $x \in \mathbb{K}$ ein Element $\tilde{x} \in \mathbb{K}$ so, dass $x + \widetilde{x} = \sigma$. Sei nun $f \in \mathbb{K}^A$ beliebig aber fest. Dann ist die Abbildung $-f : x \mapsto \widetilde{f(x)}$ wohldefiniert und es gilt $(f \oplus -f)(x) = f(x) + (-f(x)) = f(x) + \widetilde{f(x)} = \sigma = 0(x)$ also $f \oplus -f = 0$.

(iv) Seien $f, \ g \in \mathbb{K}^{\mathbb{A}}$. Dann gilt $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g \oplus f)(x)$

Wir stellen fest, dass $(\mathbb{K}^A, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist.

(v) Seinen $\alpha, \ \beta$ aus $\mathbb{K}$ und $f$ aus $\mathbb{K}^A$. Dann gilt :
$((\alpha + \beta) \odot f)(x) = (\alpha + \beta) \cdot f(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(x) = \alpha \odot f(x) + \beta \odot f(x)$

(vi) Sei $\alpha$ aus $\mathbb{K}$ und $f, \ g$ aus $\mathbb{K}^A$. Dann gilt :
$(\alpha \odot (f \oplus g))(x) = \alpha \cdot (f \oplus g)(x) = \alpha \cdot (f(x) + g(x)) = \alpha \cdot f(x) + \alpha \cdot g(x)$
$= (\alpha \odot f \oplus \alpha \odot g)(x)$

(vii) Seinen $\alpha, \ \beta$ aus $\mathbb{K}$ und $f$ aus $\mathbb{K}^A$. Dann gilt :
$(\alpha \odot (\beta \odot f))(x) = \alpha \cdot (\beta \odot f)(x) = \alpha \cdot \beta \cdot f(x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot f(x) = ((\alpha \cdot \beta) \odot f)(x)$

(viii) Da $\mathbb{K}$ ein Körper ist existiert ein Element $\mathbb{1} \in \mathbb{K}$ so, dass für alle $x \in \mathbb{K}$ $\mathbb{1} \cdot x = x$ gilt. Entsprechen gilt :
$(\mathbb{1} \odot f)(x) = \mathbb{1} \cdot f(x) = f(x)$
für beliebige $f$ aus $\mathbb{K}^A$.

**2. Aufgabe :** Es sind Teilraum Eigenschaften nachzurechnen :

(i) $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_1 \neq \emptyset$

(iii) $x,\ y \in \mathcal{T}_1,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ x_2 + \lambda y_2 \\ x_3 + \lambda y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ x_1 + \lambda y_1 \\ x_1 + \lambda y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_1$

(iv) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{T}_1$

$\mathcal{T}_2$ ist kein Teilraum des $\mathbb{R}^2$, denn $x,\ y \in \mathcal{T}_2 \nRightarrow x + y \in \mathcal{T}_2$. Seien dazu

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \textit{ dann folgt } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \textit{ wobei } z_2^2 = 0 \neq (-2)^2 = z_1^2 = z_3^2$$

Also ist $\mathcal{T}_2$ unter der Addition nicht abgeschlossen. Es kann folglich kein Teilraum sein.

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \mathcal{T}_3$, also ist $\mathcal{T}_3$ kein Teilraum des $\mathbb{R}^3$.

(i) $\mathcal{T}_4 \subseteq \mathbb{R}^2$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_4 \neq \emptyset$

(iii) $x,\ y \in \mathcal{T}_4,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ x_2 + \lambda y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = z \in \mathcal{T}_4$ Der

(iv) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_4$

Vektor $z$ ist in $\mathcal{T}_4$, da $7z_1 - 5z_2 = 7x_1 + \lambda 7y_1 - 5x_2 - \lambda 5y_2 = 7x_1 - 5x_2 + \lambda(7y_1 - 5y_2) = 0$.

**3. Aufgabe :** Mögliche Basen sind :

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{T}_1} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \mathfrak{B}_{\mathcal{T}_4} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

**4. Aufgabe :**

**a)** Wir gehen hier analog zu der Aufgabe 2 vor : i) $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^3$

ii) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M} \neq \emptyset$

iii) Seien $x, y \in \mathcal{M}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ x_2 + \lambda y_2 \\ x_3 + \lambda y_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (x_1 + \lambda y_1) + 5(x_2 + \lambda y_2) + 2(x_3 + \lambda y_3) = x_1 + 5x_2 + 2x_3 + \lambda(y_1 + 5y_2 + 2y_3) = 0$$

iv) Nach Punkt ii) ist der Nullvektor in $\mathcal{M}$.

**b)** $\mathfrak{B}_{\mathcal{M}} \left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

**c)** Man rechnet nach, dass $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ ist. Anschließend geht man analog zu Teilaufgabe $a$) vor.

**5. Aufgabe :** i) $\mathcal{T}_1$ ist ein Teilraum (direkt Nachrechenbar)
ii) Man betrachte die Matrizen $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_2$ aber $A + B \notin \mathcal{T}_2$
iii) $\mathcal{T}_3$ ist ein Teilraum (direkt Nachrechenbar)

**b)** Da $x^2 - x = 1 \cdot x^2 + (-1) \cdot x$ gilt, ist das Erzeugendensystem $\{x^2,\ x^2 - x,\ x\}$ von $\mathcal{T}$ linear abhängig. Weil $x^2 - x = 1 \cdot x^2 + (-1) \cdot x$ gilt, ist (z.B.) auch $\{x^2,\ x\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{T}$. Wegen $\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x = 0x^2 + 0x + 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ sind die Vektoren $x^2,\ x$ linear unabhänging, also bilden die zwei Polynome $x$ und $x^2$ eine Basis von $\mathcal{T}$. Folglich ist $dim(\mathcal{T}) = 2$.

**6. Aufgabe :** 1) Lineare Unabhängigkeit zeigen mit LGS und Koeffzientenvergleich. ... Nur triviale Nulldarstellung, darum linear unabhängig.

2) $p_1,\ p_3$ sind linear unabhängig nach 1), $p_2 \in span\,\{p_1,\ p_3\}$ wegen $2p_2 = p_1 + p_3$. Also ist $\{p_1,\ p_3\}$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $\mathcal{S}$ und damit eine Basis.

3) Nach 2) folgt, dass $dim(\mathcal{S}) = 2$.

**7. Aufgabe :** a) Direkt Nachrechenbar.

b) Wähle $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{M}$ da $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$ wegen $0 - 0 = 0$ und $A \in \mathcal{M}$ wegen $1 - 1 = 0$. Aus $\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ folgt durch Komponentenvergleich das LGS $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0$. Die drei Matrizen lassen sich nur trivial zur Nullmatrix linear kombinieren und sind somit linear unabhängig. Da die drei Matrizen in $\mathfrak{B}$ linear unabhängig sind und $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{M}$, ist $\mathfrak{B}$ eine Basis des (nach Aufgabenstellung) dreidimensionalen Teilraums $\mathcal{M}$.

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{N}$, da $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Aber $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin \mathcal{M}$, da $1 - 0 = 1 \neq 0$. $\mathcal{N} \nsubseteq \mathcal{M}$ und somit kein Teilraum von $\mathcal{M}$.