Allgemeine Vektorräume

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
☐	☐	$\mathbb{K}_{\leq 3} = \left\{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \ x^i \vert \lambda_i \in \mathbb{K}, \ x \in \mathcal{R}\right\}$, wobei $\mathcal{R}$ eine $\mathbb{K}$-Algebra ist. (Als $\mathbb{K}$-Algebra bezeichnet man eine V.R. über $\mathbb{K}$, der um eine V.R.-Struktur erhaltende Multiplikation erweitert wurde.)
☐	☐	Sei V ein $\mathbb{K}$-V.R. mit $m = dim(V) < \infty$ und $(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m)$ eine Basis von V. Dann existieren zu jedem Element $\nu \in V$ ∞-viele $\lambda_1, ..., \lambda_m$ so, dass $\nu = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ \vec{b}_i$
☐	☐	Eine Menge von Vektoren $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}\}$ eines $\mathbb{K}$-V.R. heißt linear unabhängig falls : $\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + ... + \lambda_n\vec{v_n} = \vec{0} \ \Rightarrow \ \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \sigma$ wobei σ das Nullelement der Addition des $\mathbb{K}$-V.R. ist.
☐	☐	Ein Vektorraum der Dimension n hat genau n Basiselemente
☐	☐	Jedes Erzeugendensystem ist eine Basis

1. Aufgabe : A sei eine beliebige Menge, $\mathbb{K} = (\mathcal{K}, +, \cdot)$ ein Körper und $\mathbb{K}^A := \{f \vert f : A \mapsto \mathbb{K}\}$. Für $f, \ g \in \mathbb{K}^A$ und $c \in \mathbb{K}$ seien $f \oplus g$ und $c \odot f$ definiert durch :

$$(f \oplus g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (c \odot f)(x) = c \cdot f(x).$$

Man zeige, dass $\mathbb{K}^A$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist.

Bemerkung :
· Ein Körper ist eine Menge K versehen mit zwei inneren zweistelligen Verknüpfungen "$+$" und "$\cdot$" (die Addition und Multiplikation genannt werden), für die folgende Bedingungen erfüllt sind :
-$(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe (Neutrales Element 0)
-$(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe (Neutrales Element 1)
-Es gelten die Distributivgesetze : Für alle a, b, c $\in K$ gilt :
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

· Eine abelsche Gruppe ist ein Paar $(G, *)$ bestehend aus einer Menge G und einer inneren zweistelligen Verknüpfung "*" auf G. Das heißt, durch "*" wird die Abbildung $*: G \times G \to G, (a, b) \mapsto a * b$ beschrieben. Erfüllt die Verknüpfung die folgenden Axiome, dann wird $(G, *)$ abelsche Gruppe genannt :
-Assoziativität : Für alle Gruppenelemente a, b und c gilt : $(a * b) * c = a * (b * c)$.
-Es gibt ein neutrales Element $e \in G$, mit dem für alle Gruppenelemente $a \in G$ gilt : $a * e = e * a = a$.
-Zu jedem Gruppenelement $a \in G$ existiert ein inverses Element $a^{-1} \in G$ mit $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.
-Kommutativität : Für alle Gruppenelemente a, b gilt : $a * b = b * a$

2. Aufgabe : Überprüfen Sie, welche der folgenden Teilmengen ein Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ oder $\mathbb{R}^2$ sind.

(a) $\mathcal{T}_1 := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1 = x_2 = x_3 \right\}$ (b) $\mathcal{T}_2 := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_2^2 = x_3^2 \right\}$

(c) $\mathcal{T}_3 := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1 = 1 \right\}$ (d) $\mathcal{T}_4 := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 | 7x_1 - 5x_2 = 0 \right\}$

3. Aufgabe : Bestimmen Sie zu jedem Teilraum der *2. Aufgabe* eine Basis.

4. Aufgabe : Gegeben sei die Menge $\mathcal{M} := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} | x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$ ist.
(b) Bestimmen sie eine Basis des Teilraums.
(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathcal{N} := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} | x_1 = -2x_3, \; x_2 = 0 \right\}$ und zeigen Sie, dass $\mathcal{N}$ ein Teilraum von $\mathcal{M}$ ist.

5. Aufgabe : a) Entscheiden Sie bei jeder der folgenden Mengen, ob es sich um einen Teilraum des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ handelt :

(i) $\mathcal{T}_1 := \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} | a, \; d \in \mathbb{R} \right\}$ (ii) $\mathcal{T}_2 := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} | a \cdot b \cdot c \cdot d = 0 \right\}$

(iii) $\mathcal{T}_3 := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} | a + b = c + d \right\}$

b) Gegeben sei der Teilraum $\mathcal{T} = span\,\{x^2, \; x^2 - x, \; x\}$ von $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Bestimmen Sie die Dimension von $\mathcal{T}$.

6. Aufgabe : Gegeben sind die Polynome $p_1(x) = x^5 - x^2, \; p_2(x) = x^5, \; p_3(x) = x^5 + x^2$ und $q_1(x) = 0, \; q_2(x) = x^2, \; q_3(x) = x^7$. Weiter sei $\mathcal{S} := span\,\{p_1, \; p_2, \; p_3\}$.

1. Sind die Polynome $p_1, \; p_3, \; q_3$ linear unabhängig?
2. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{p_1, \; p_3\}$ eine Basis von $\mathcal{S}$ bilden.
3. Bestimmen Sie die Dimension von $\mathcal{S}$.

7. Aufgabe : Gegeben sei die Menge $\mathcal{M} := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} | b - d = 0 \right\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist.

b) $\mathcal{M}$ ist dreidimensional. Geben Sie eine Matrix A an, sodass $\mathfrak{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A \right\}$ eine Basis von $\mathcal{M}$ ist und begründen sie, dass $\mathfrak{B}$ mit dem gewählten A eine Basis von $\mathcal{M}$ ist.

c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{N} := \{B \in \mathbb{R}^{2\times 2} | B^2 = 0\}$ kein Teilraum von $\mathcal{M}$ ist.