Determinante - Lösung

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
$\boxtimes$	$\square$	Die Determinante ist eine Abbildung $\mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$
$\square$	$\boxtimes$	$det(A) = 0 \Leftrightarrow$ die Spalten von A linear unabhängig sind.
$\boxtimes$	$\square$	$det(AB) = det(A)det(B)$
$\square$	$\boxtimes$	Die Determinante einer nicht quadratischen Matrix ist null.
$\boxtimes$	$\square$	Ist A eine orthogonale Matrix gilt $\lvert det(A)\rvert = 1$.

1. Aufgabe :

$$i)\quad det\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 2 - (-3) = 5$$

$$ii)\quad det\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 + 3 + 0 - 0 - (-2) - (-3) = 10$$

$$iii)\quad det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 0 \cdot det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\right) - 1 \cdot det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\right) + 2 \cdot det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\right) - 3 \cdot det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}\right)$$

$$= -1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$$

2. Aufgabe :

$$\det\left(\begin{bmatrix} x & y & 0 & 1 \\ -y & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -y \\ -1 & 0 & y & x \end{bmatrix}\right)$$

$$= x \cdot det\left(\begin{bmatrix} x & -1 & 0 \\ 1 & x & -y \\ 0 & y & x \end{bmatrix}\right) - (-y) \cdot det\left(\begin{bmatrix} y & 0 & 1 \\ 1 & x & -y \\ 0 & y & x \end{bmatrix}\right) - (-1) \cdot det\left(\begin{bmatrix} y & 0 & 1 \\ x & -1 & 0 \\ 1 & x & -y \end{bmatrix}\right)$$

$$= x(x^3 + y^2x + x) + y(yx^2 + y + y^3) + (y^2 + x^2 + 1)$$

$$= x^4 + x^2y^2 + x^2 + y^2x^2 + y^2 + y^4 + y^2 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2(y^2 + 1) + y^4 + 2y^2 + 1$$

$$= (x^2 + y^2 + 1)^2$$

3. Aufgabe : Beweis : Wir führen den Beweis per Induktion durch.
Induktionsanfang : Für $m = 2$ ist

$$det\left(\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}\right) = \alpha_2 - \alpha_1$$

Also stimmt die Aussage für $m = 2$.
Induktionsvoraussetzung : Die Aussage der Aufgabe 3 gilt für beliebige aber feste $n \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq n$.
Induktionsschritt :Wir ziehen in V das α_1-fache der vor letzten Spalte von der letzten ab und erhalten

$$det(V) = det\left(\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \dots & \alpha_m^{n-1} \end{bmatrix}\right) = det\left(\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-2} & 0 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-2} & (\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_2^{n-2} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-2} & (\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \dots & \alpha_m^{n-2} & (\alpha_m - \alpha_1)\alpha_m^{n-2} \end{bmatrix}\right)$$

Dieses Verfahren führen wir nun iterativ $(n-1)$ mal durch und erhalten die Determinante einer Matrix, welche in der ersten Zeile als erstes Element die 1, sonst nur Nullen hat. Man beachte, das dies immer noch die Determinante von V ist, da diese Matrix nur durch elementare Spaltenumformungen aus V hervor geht. Wir bekommen also :

$$\begin{aligned} det(V) &= det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & (\alpha_2 - \alpha_1) & (\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_2 & \dots & (\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_2^{n-3} & (\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_2^{n-2} \\ 1 & (\alpha_3 - \alpha_1) & (\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_3 & \dots & (\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_3^{n-2} & (\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & (\alpha_m - \alpha_1) & (\alpha_m - \alpha_1\alpha_m & \dots & (\alpha_m - \alpha_1\alpha_m^{n-3} & (\alpha_m - \alpha_1)\alpha_m^{n-2} \end{bmatrix}\right) \\ &= det\left(\begin{bmatrix} (\alpha_2 - \alpha_1) & (\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_2 & \dots & (\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_2^{n-3} & (\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_2^{n-2} \\ (\alpha_3 - \alpha_1) & (\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_3 & \dots & (\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_3^{n-2} & (\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (\alpha_m - \alpha_1) & (\alpha_m - \alpha_1\alpha_m & \dots & (\alpha_m - \alpha_1\alpha_m^{n-3} & (\alpha_m - \alpha_1)\alpha_m^{n-2} \end{bmatrix}\right) \\ &= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)...(\alpha_m - \alpha_1) det\left(\begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \dots & \alpha_m^{n-1} \end{bmatrix}\right) \\ &\underbrace{=}_{I.V.} \prod_{i=2}^{m}(\alpha_i - \alpha_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n}(\alpha_j - \alpha_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(\alpha_j - \alpha_i) \end{aligned}$$

4. Aufgabe :

$$i)\quad det\left(\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{3}\\ \frac{1}{\sqrt{7}} & \sqrt{2}\end{bmatrix}\right) = 2-\sqrt{\frac{3}{7}} \neq 0$$

$$ii)\quad det\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{7}\\ \sqrt{15} & \frac{2}{11} & \frac{\sqrt{2}}{17}\\ \frac{3}{37} & \frac{7}{15} & \frac{1}{13}\end{bmatrix}\right) = \frac{2}{16\cdot 11\cdot 13}+\frac{3\cdot\sqrt{2}}{4\cdot 17\cdot 37}+\frac{\sqrt{15}\cdot 7}{7\cdot 15}-\frac{3\cdot 2}{37\cdot 11\cdot 7}-\frac{7\cdot\sqrt{2}}{15\cdot 17\cdot 16}-\frac{\sqrt{15}}{4\cdot 13}$$
$$=\frac{2\cdot 4\cdot 7\cdot 15\cdot 17\cdot 37+3\cdot\sqrt{2}\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 15\cdot 16+\sqrt{15}\cdot 7\cdot 4\cdot 11\cdot 13\cdot 16\cdot 17\cdot 37}{4\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 37}$$
$$-\frac{3\cdot 2\cdot 4\cdot 13\cdot 15\cdot 16\cdot 17+7\cdot\sqrt{2}\cdot 4\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37+\sqrt{15}\cdot 7\cdot 11\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 37}{4\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 37}\neq 0$$

$$iii)\quad det\left(\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\right) = 9+3+2+1-18+3=0$$

5. Aufgabe :

$$i)\quad det\left(\begin{bmatrix}\cos(\phi) & -\sin(\phi)\\ \sin(\phi) & \cos(\phi)\end{bmatrix}\right) = \cos(\phi)^2+\sin(\phi)^2 = 1$$

$$ii)\quad det\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right) = -1$$

$$iii)\quad det\left(\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right) = 4-3=1$$

$$iv)\quad det\left(\begin{bmatrix}3x^3 & x^2-1\\ 3x^2+3 & x\end{bmatrix}\right) = 3x^4-3x^4+3x^2-3x^2+3=3$$

6. Aufgabe :

$$i)\quad A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}\cos(\phi) & -\sin(\phi)\\ \sin(\phi) & \cos(\phi)\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}\cos(\phi) & \sin(\phi)\\ -\sin(\phi) & \cos(\phi)\end{bmatrix}$$

$$ii)\quad A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$iii)\quad A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$iv)\quad A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}x & -3x^2-3\\ -x^2+1 & 3x^3\end{bmatrix}^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}x & -x^2+1\\ -3x^2-3 & 3x^3\end{bmatrix}$$

7. Aufgabe :

a)

$$
\begin{aligned}
&A\vec{x} = \lambda\vec{x} = \lambda I\vec{x} \\
\Leftrightarrow &A = \lambda I \\
\Leftrightarrow &A - \lambda I = 0 \\
\Leftrightarrow &det(A - \lambda I) = det(0) = 0
\end{aligned}
$$

b) Der Ausdruck $det(A - \lambda\ I)$ beschreibt ein Polynom von Grad n, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist, welches in λ variiert. Diejenigen λ für die $det(A - \lambda\ I) = 0$ gilt, sind die Nullstellen den durch $det(A - \lambda\ I)$ beschriebenen Polynoms.

c) Man findet die Vektoren $\vec{x}$ in dem man $Ker(A - \lambda I)$ untersucht. Alle Elemente dieses Raumes erfüllen die obige Bedingung, man ist allerdings lediglich an einer Basis dieses Raumes interessiert.