Determinante

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
☐	☐	Die Determinante ist eine Abbildung $\mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$
☐	☐	$det(A) = 0 \Leftrightarrow$ die Spalten von A linear unabhängig sind.
☐	☐	$det(AB) = det(A)det(B)$
☐	☐	Die Determinante einer nicht quadratischen Matrix ist null.
☐	☐	Ist A eine orthogonale Matrix gilt $\lvert det(A)\rvert = 1$.

1. Aufgabe : Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen :

$$\text{i)}\quad \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ii)}\quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{iii)}\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

2. Aufgabe : Man zeige mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt :

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 0 & 1 \\ -y & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -y \\ -1 & 0 & y & x \end{pmatrix} = (x^2 + y^2 + 1)^2 \,.$$

3. Aufgabe : Beweisen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussage :

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \dots & \alpha_m^{n-1} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(V) = \prod_{1\le i<j\le n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Bemerkung : Die obige Matrix ist als Vandermonde-Matrix bekannt. Sie spielt bei der Interpolation von Funktionen eine wichtige Rolle. Zum Beweis bietet sich das Prinzip der Induktion an.

4. Aufgabe : Bestimmen Sie welche der folgenden Mengen von Vektoren linear unabhängig sind :

$$\text{i)} \quad \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{7}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \right\} \quad \text{ii)} \quad \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{16} \\ \sqrt{15} \\ \frac{3}{37} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{7}{15} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{\sqrt{2}}{17} \\ \frac{1}{13} \end{bmatrix} \right\} \quad \text{iii)} \quad \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

5. Aufgabe : Welche der folgenden Matrizen sind invertierbar ?

$$\text{i)} \quad \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad \text{ii)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{iii)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{iv)} \quad \begin{bmatrix} 3x^3 & x^2 - 1 \\ 3x^2 + 3 & x \end{bmatrix}$$

6. Aufgabe : Bestimmen Sie mit Hilfe der Determinante die Inversenmatrizen der invertierbaren Matrizen aus Aufgabe 5.

7. Aufgabe : Im Folgenden soll das Problem $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ untersucht werden. Ziel ist es den Wert λ und den (die) Vektor(en) $\vec{x}$ zu finden so, dass obige Gleichung erfüllt ist.

a) Zeigen Sie, dass die suche nach λ äquivalent ist zu der Lösung des Problems $det(A - \lambda\ I) = 0$.

b) Welches Mathematische Objekt wird mit der Ausdruck $det(A - \lambda\ I)$ beschrieben ? Welches Charakteristikum sind diejenigen λ, für die gilt $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, für ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

c) Wie kann unter der Kenntnis von λ derjenige (bzw. diejenigen) Vektor(en) $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gefunden werden so, dass $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ gilt ?