Diagonalisierbare Matrizen

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
☐	☒	Jede Matrix ist diagonalisierbar.
☒	☐	Die Transformationsmatrizen S bzw. S^{-1} stellen Basistransformationen dar.
☐	☒	Besitzt eine Matrix einen doppelten Eigenwert, so ist sie nicht diagonalisierbar.
☒	☐	Ist die aglebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit für alle Eigenwerte, so ist die Matrix diagonalisierbar.

1. Aufgabe :

i) Nein, da die Vektorgleichung $L\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}17\\8\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ keine Lösung hat, da sich der erste und der zweite Eintrag widersprechen.

ii) Charakteristisches Polynom :

$$p_L(z) = det(L - zI_2) = det\begin{bmatrix}1-z & 4\\ 4 & 1-z\end{bmatrix} = (1-z)^2 - 16 = 1 - 2z + z^2 - 16 = z^2 - 2z - 15$$

Nullstellen von $p_L(z)$ sind die Eigenwerte von L. Mit der $p-q-$Formelfolgt :

$$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+15} = 1 \pm 4$$

Also $z_1 = 5,\ z_2 = -3$.

Eigenraum zu $z_1 = 5$:

$$V_{z_1} = Kern\begin{bmatrix}-4 & 4\\ 4 & -4\end{bmatrix} \overset{II+I,I:4}{=} Kern\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = Spann\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

Eigenraum zu $z_2 = -3$:

$$V_{z_2} = Kern\begin{bmatrix}4 & 4\\ 4 & 4\end{bmatrix} \overset{II-I,I:4}{=} Kern\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = Spann\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

iii) In S stehen in den Spalten die Eigenvektoren, in D die entsprechenden Eigenwerte auf der Diagonalen $S = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}$

iv) Gauss-Algorithmus :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{II-I} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{I+\frac{1}{2}II, \frac{1}{2}II} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Also

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Aufgabe :

i) Es ist $C\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, also ist $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von C zum Eigenwert 2.

ii) Berechnung der Eigenwerte : Es ist

$$C - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 6 & -2-\lambda \end{bmatrix},$$

also ist

$$p_C(\lambda) = det(C-\lambda I) = (5-\lambda)(-2-\lambda)+12 = -10-3\lambda+\lambda^2+12 = \lambda^2-3\lambda+2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$$

Also ist $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$.

Berechnung des Eigenraums zu $\lambda = 1$: Lösung des homogenen LGS :

$$[C - I|0] = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Hieraus und aus $i)$ ergibt sich also für die Eigenräume

$$V_1 = Kern(C-I) = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}, \qquad V_2 = Kern(C-2I) = span\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$$

iii) In der Diagonalmatrix D stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen, in S die zugehörigen Eigenvektoren :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Berechnung von $S^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

3. Aufgabe :

i) Laplace-Entwicklung nach der zweiten Spalte liefert

$$P_B(z) = det(B - zI) = det\left(\begin{bmatrix} 2-z & 0 & 3 \\ 5 & -z & -2 \\ 1 & 0 & 4-z \end{bmatrix}\right) = +(-z)det\left(\begin{bmatrix} 2-z & 3 \\ 1 & 4-z \end{bmatrix}\right)$$
$$= (-z)((2-z)(4-z)-3) = (-z)(z^2-6z+5) = (-z)(z-5)(z-1)$$

ii) Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, somit $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 5$. Da jeder Eigenwerte genau einmal vorkommt, ist die algebraische Vielfachheit jedes Eigenwertes gleich eins.

iii) Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_{1,2} = 2$ ist

$$V_2 = Kern(C-2I) = Kern\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = Kern\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

iv) In der Diagonalmatrix D stehen die Eigenwerte der Matrix C. Die Matrix S besteht aus den linear unabhängigen Eigenvektoren (dabei ist die Reihenfolge zu beachten), also

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Aufgabe :

i) Es gilt

$$A\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$A\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$A\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Also sind $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Eigenvektoren zum Eigenwert 4 und $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert 0.

ii) Die beiden Eigenvektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ zum Eigenwert 4 sind linear unabhängig, also ist die geometrische Vielfachheit von 4 mindestens 2, die geometrische Vielfachheit von 0 ist mindestens 1. Da die Summe aller geometrischen Vielfachheiten h¨ochstens drei sein kann, muss die geometrische VFH von 4 zwei sein und die von 0 muss 1 sein. Da die Summe aller geometrischen Vielfachheiten gleich die Dimension von $\mathbb{C}^3$ ist, existiert eine Basis von Eigenvektoren, also ist A diagonalisierbar. Ist D eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen und S die Matrix mit den Eigenvektoren als Spalten, so gilt $A = SDS^{?1}$. Also mit $S = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ist eine Diagonalisierung von A gegeben.

5. Aufgabe :

i) 3 Punkte

$$p_B(\lambda) = det(B - \lambda I_3) = det\left(\begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = det\left(\begin{bmatrix} -2-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right)$$
$$= (2-\lambda)det\left(\begin{bmatrix} -2-\lambda & 4 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right) = -(2-\lambda)^2\lambda$$

ii) 5 Punkte Die Eigenwerte von B sind die Nullstellen von $p_B(\lambda) : \lambda_1 = 0$ und $\lambda_{2,3} = 2$
Der Eigenraum zum Eigenwert 2 ist :

$$V_{\lambda_{2,3}} = ker(B - \lambda_{2,3} I_3) = ker\left(\begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \{\ -4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \{\ x_1 = -\tfrac{x_2}{2} + x_3 \quad \Rightarrow V_{\lambda_1} = Span\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

iii) 3 Punkte Nach a), b) ist alg VFH($\lambda_{1,2}$) $= 2 = \dim(V_{\lambda_{1,2}})=$ geom VFH($\lambda_{1,2}$), da $\lambda_{1,2}$ doppelte Nullstelle von p_B ist und der zugehörige Eigenraum $V_{\lambda_{1,2}}$ von zwei linear unabhängigen Vektoren aufgespannt wird. Da für jeden Eigenwert 1 geom VFH = alg VFH gilt, ist alg VFH(λ_3) $= 1 =$ geom VFH(λ_3). Also stimmt die alg VFH mit der geom VFH für alle Eigenwerte von B überein und B ist somit diagonalisierbar.

iv) 1 Punkt

$$B\vec{w} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} 2\vec{w}$$

Also ist $\vec{w}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2.