Diagonalisierbare Matrizen

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
☐	☐	Jede Matrix ist diagonalisierbar.
☐	☐	Die Transformationsmatrizen S bzw. S^{-1} stellen Basistransformationen dar.
☐	☐	Besitzt eine Matrix einen doppelten Eigenwert, so ist sie nicht diagonalisierbar.
☐	☐	Ist die aglebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit für alle Eigenwerte so ist die Matrix diagonalisierbar.

1. Aufgabe : Gegeben ist die Matrix $L = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

(i)	2 Punkte	Ist $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von L ?
(ii)	5 Punkte	Berechnen Sie die Eigenwerte von L und die zugehörigen Eigenräume.
(iii)	2 Punkte	Diagonalisieren Sie L, d.h. geben Sie Matrizen S und D an so, dass D eine Diagonalmatrix ist und $L = SDS^{-1}$.
(iv)	2 Punkte	Berechnen Sie S^{-1}.

2. Aufgabe : **(14 Punkte)** Gegeben ist die Matrix $C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

i) Zeigen Sie, dass $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von C ist.

ii) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von C.

iii) Bestimmen Sie eine Diagonalisierung von C, d.h. Matrizen S, S^{-1} und D, mit D eine Diagonalmatrix so, dass $C = SDS^{-1}$ gilt.

3. Aufgabe : Betrachten Sie die Matrizen $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

i) Berechnen Sie mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes das charakteristische Polynom von B.
ii) Berechnen Sie die Eigenwerte von B sowie die algebraische Vielfachheit zu jedem dieser Eigenwerte und diskutieren Sie die Diagonalisierbarkeit von B.
iii) Die Matrix C hat die Eigenwerte $\lambda_{1,\ 2} = 2$ und $\lambda_3 = 1$. Bestimmen Sie den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_{1,\ 2} = 2$.
iv) Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 1$ der Matrix C ist $\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix S, so dass $C = SDS^{-1}$.

4. Aufgabe : (7 Punkte) Es sei $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

i) Zeigen Sie, dass $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Eigenvektoren zu A sind und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte.
ii) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist und geben Sie eine Diagonalisierung von A an, d.h., finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix S, so dass $A = SDS^{-1}$.

5. Aufgabe : Gegeben sei die Matrix $B = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und der Vektor $\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

i) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_B der Matrix B.
ii) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B und den Eigenraum zum größten Eigenwert.
iii) Ist B diagonalisierbar ?
iv) Zeigen Sie, dass $\vec{w}$ ein Eigenvektor von B ist.
v) Bestimmen Sie die Diagonalmatrix von A, sowie die Transformationsmatrizen $S,\ S^{-1}$.

.