Differentialgleichungen

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
☐	☒	Die Lösung einer DGL ist ein Vektor.
☐	☒	Differentialgleichungen sind, anders als lineare Gleichungen, immer eindeutig Lösbar.
☐	☒	Die Exponentialreihe einer Matrix ist die Matrix der Exponentialreihe der Einträge.
☒	☐	Die allgemeine Lösung eines AWP einer linearen DGL mit konstanten Koeffizienten A ist mit $y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0$ gegeben.

1. Aufgabe :

i)

$$y'(t) = -2 \cdot y(t),\ auf\ \mathbb{R}$$

Wir nehmen an $y(t)$ ist von der Gestalt $y(t) = k \cdot e^{\lambda \cdot t}$. Setzen wir dies ein, so erhalten wir :

$$\lambda \cdot k \cdot e^{\lambda \cdot t} = -2 \cdot k \cdot e^{\lambda \cdot t} \Leftrightarrow \lambda = -2$$

Damit lautet die Lösung der homogenen DGL

$$y_{hom}(t) = k \cdot e^{-2 \cdot t},\ auf\ \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}$$

ii)

$$y'(t) = -2 \cdot t \cdot y(t),\ auf\ \mathbb{R}$$

Wir nehmen an $y(t)$ ist von der Form $y(t) = k \cdot e^{\lambda(t)}$. Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\lambda(t)' \cdot k \cdot e^{\lambda(t)} = -2 \cdot t \cdot k \cdot e^{\lambda(t)} \Leftrightarrow \lambda(t)' = -2 \cdot t \Rightarrow \lambda(t) = -t^2$$

Also lautet die Lösung der homogenen DGL

$$y_{hom}(t) = k \cdot e^{-t^2},\ auf\ \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}$$

iii)

$$y'(t) = \frac{y(t)}{t},\ auf\ \mathbb{R}$$

Wir nehmen an $y(t)$ ist von der Form $y(t) = k \cdot e^{\lambda(t)}$. Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\lambda(t)' \cdot k \cdot e^{\lambda(t)} = \frac{ke^{\lambda(t)}}{t} \Leftrightarrow \lambda(t)' = \frac{1}{t} \Rightarrow \lambda(t) = ln(t)$$

Also lautet die Lösung der homogenen DGL

$$y_{hom}(t) = k \cdot t,\ auf;\mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}$$

iv)

$$y'(t) = \cos(t)y(t),\ auf\ \mathbb{R}$$

Wir nehmen an $y(t)$ ist von der Form $y(t) = k \cdot e^{\lambda(t)}$. Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\lambda(t)' \cdot k \cdot e^{\lambda(t)} = \cos(t)ke^{\lambda(t)} \Leftrightarrow \lambda(t)' = \cos(t) \Rightarrow \lambda(t) = \sin(t)$$

Also lautet die Lösung der homogenen DGL

$$y_{hom}(t) = ke^{cos(t)},\ auf;\mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}$$

2. Aufagbe :

i)

Homogene Lösung :

$$y'(t) = -e^t \cdot y(t),\ auf;\mathbb{R}$$

Wir nehmen an, dass $y(t)$ von der Form $y(t) = k \cdot e^{\lambda(t)}$ ist. Setzen wir dies in die homogene DGL ein so erhalten wir :

$$\lambda'(t) \cdot k \cdot e^{\lambda(t)} = -e^t \cdot k \cdot e^{\lambda(t)} \Leftrightarrow \lambda'(t) = -e^t$$

Die homogene Lösung der DGL lautet folglich :

$$y_{hom}(t) = k \cdot e^{-e^t},\ auf;\mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}$$

Partikuläre Lösung : Wir verwenden hier die variation der Konstanten. Wir nehmen also an, dass k nicht konstant ist sondern von t abhängt. Mit diesem Ansatz erhalten wir für die inhomogene DGL :

$$k'(t) \cdot e^{-e^t} - e^t \cdot k(t) \cdot e^{-e^t} = -e^t \cdot k(t) \cdot e^{-e^t} + e^{2 \cdot t} \Leftrightarrow k'(t) = e^{2 \cdot t + e^t}.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist :

$$k(t) = e^{e^t}(e^t - 1) + C,\ C \in \mathbb{R},\ auf;\mathbb{R}.$$

Setzen wir dies in die homogene Lösung ein, so erhalten wir

$$y_{part}(t) = e^t + C \cdot e^{-e^t} - 1,\ C \in \mathbb{R},\ auf;\mathbb{R}$$

als alle möglichen Lösungen für die gegebene DGL.

ii)

Homogene Lösung :

$$y'(t) = \frac{-y(t)}{t},\ auf; [a, \infty[,\ a > 0$$

Wir nehmen an $y(t)$ ist von der Form $y(t) = k \cdot e^{\lambda(t)}$. Setzen wir dies in die homogene DGL ein, so erhalten wir

$$\lambda'(t) \cdot k \cdot e^{\lambda(t)} = \frac{-k \cdot e^{\lambda(t)}}{t} \Leftrightarrow \lambda'(t) = -\frac{1}{t} \Rightarrow \lambda(t) = -ln(t)$$

Die Lösung der homogenen DGL ist also gegeben mit

$$y_{hom}(t) = k \cdot e^{-ln(t)} = \frac{k}{t},\ auf; [a, \infty[, a > 0$$

Partikuläre Lösung : Wir verwenden hier die variation der Konstanten. Wir nehmen also an, dass k nicht konstant ist sondern von t abhängt. Mit diesem Ansatz erhalten wir für die inhomogene DGL :

$$\frac{k'(t)}{t} - \frac{k(t)}{t^2} = \frac{e^t}{t} - \frac{k(t)}{t^2} \Leftrightarrow k'(t) = e^t.$$

Die Lösung dieser DGL ist

$$k(t) = e^t + C,\ C \in \mathbb{R},\ sur\ [a, \infty[.$$

Setzen wir dies in homogene Lösung ein erhalten wir

$$y_{part}(t) = \frac{e^t + C}{t},\ C \in \mathbb{R},\ auf; [a, \infty[,\ a > 0.$$

3. Aufgabe :

Homogene Lösung :

$$y'(t) = \frac{y(t)}{t},\ auf;]0, \infty[$$

Wir nehmen an $y(t)$ ist von der Form $y(t) = k \cdot e^{\lambda(t)}$. Setzen wir dies in die homogene DGL ein, so erhalten wir

$$\lambda'(t) \cdot k \cdot e^{\lambda(t)} = \frac{k \cdot e^{\lambda(t)}}{t} \Leftrightarrow \lambda'(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow \lambda(t) = ln(t)$$

Die Lösung der homogenen DGL ist also

$$y_{hom}(t) = k \cdot t,\ auf;]0, \infty[$$

Partikuläre Lösung : Wir verwenden hier die variation der Konstanten. Wir nehmen also an, dass k nicht konstant ist sondern von t abhängt. Mit diesem Ansatz erhalten wir für die inhomogene DGL :

$$k'(t) \cdot t + k(t) = \frac{k(t) \cdot t + 1}{t} \Leftrightarrow k'(t) = \frac{1}{t^2}.$$

Die Lösung dieser DGL ist damit

$$k(t) = -\frac{1}{t} + C,\ C \in \mathbb{R},\ auf;]0, \infty[.$$

Setzen wir dies in die homogene Lösung ein, so erhalten wir

$$y_{part}(t) = t \cdot C - 1,\ C \in \mathbb{R},\ auf]0, \infty[$$

Mit dem gegebenen Anfangswert, kann man nun die Konstante C und damit die eindeutige Lösung dieser DGL bestimmen. Hier gilt

$$0 = y(1) = C - 1 \Rightarrow y(t) = t - 1,\ sur\ ]0, \infty[$$

ii)

Homogene Lösung :

$$y'(t) = 3 \cdot y(t),\ sur\ \mathbb{R}$$

Wir nehmen an das $y(t)$ von der Form $y(t) = k \cdot e^{\lambda \cdot t}$ ist. Setzt man dies in die homogene DGL ein

$$\lambda \cdot k \cdot e^{\lambda \cdot t} = 3 \cdot k \cdot e^{\lambda \cdot t} \Leftrightarrow \lambda = 3$$

Also ist die Lösung der homogenen DGL gegeben mit

$$y_{hom}(t) = k \cdot e^{3 \cdot t},\ sur\ \mathbb{R}$$

Partikuläre Lösung : Wir verwenden hier die variation der Konstanten. Wir nehmen also an, dass k nicht konstant ist sondern von t abhängt. Mit diesem Ansatz erhalten wir für die inhomogene DGL :

$$k'(t) \cdot e^{3 \cdot t} + 3 \cdot k(t) \cdot e^{3 \cdot t} = 3 \cdot k(t) \cdot e^{3 \cdot t} + e^{2 \cdot t} \Leftrightarrow k'(t) = e^{-t}.$$

Die Lösung ist damit gegeben durch

$$k(t) = -e^{-t} + C,\ C \in \mathbb{R},\ auf; \mathbb{R}.$$

Setzen wir dies in die homogene Lösung der DGL ein, erhalten wir

$$y_{part}(t) = C \cdot e^{3 \cdot t} - e^{2 \cdot t},\ C \in \mathbb{R},\ auf]0, \infty[$$

Mit dem gegebenen Anfangswert, kann man nun die Konstante C und damit die eindeutige Lösung dieser DGL bestimmen. Hier gilt

$$\begin{aligned} 3 &= y(0) = C - 1 \\ \Leftrightarrow 4 &= C \Rightarrow y(t) = 4 \cdot e^{3 \cdot t} - e^{2 \cdot t},\ auf; \mathbb{R} \end{aligned}$$

4. Aufgabe : Zur Bestimmung der Exponentialreihen der gegeben matrizen gehen wir auf die Definition der Exponentialreihe zurück und setzen die entsprechenden Matrizen ein :

i)

$$exp(A_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_1^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}^n}{n!} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & 0 \\ 0 & 0 & e^7 \end{bmatrix}$$

ii)

$$exp(A_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}^n}{n!} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_2^n}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_3^n}{n!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha_3} \end{bmatrix}$$

iii)

$$exp(A_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_3^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{bmatrix}^n}{n!} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 15 & -8 & 6 \\ 10 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

5. Aufgabe :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(S^{-1}AS)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{-1}ASS^{-1}AS...S^{-1}AS}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{-1}A^nS}{n!} = S^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right) S$$

6. Aufgabe : Bei AWP einer lineare DGL mit konstanten Koeffizienten ist die eindeutige Lösung durch den Ausdruck $y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0$. Dies ist auch für mehrdimensionale DGL gültig. Da vor liegenden AWP alle lineare DGL mit konstanten Koeffizienten behandeln, können wir mit diesem Ergebnis der Vorlesung arbeiten :

i)

$$\vec{y}(t) = exp((t-t_0)A)\vec{y}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((t-t_0)A)^n \vec{y}_0}{n!} \underbrace{=}_{y_0 \ ist\ E.V.} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((t-t_0)\lambda)^n \vec{y}_0}{n!} = e^{(t-3)} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ii)

$$\vec{y}(t) = exp((t-t_0)A)\vec{y}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((t-t_0)A)^n \vec{y}_0}{n!} \underbrace{=}_{y_0 \ ist\ E.V.} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((t-t_0)\lambda)^n \vec{y}_0}{n!} = e^{-2(t-5)} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

iii)

$$\vec{y}(t) = exp((t-t_0)A)\vec{y}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((t-t_0)A)^n \vec{y}_0}{n!} \underbrace{=}_{y_0 \ ist\ E.V.} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((t-t_0)\lambda)^n \vec{y}_0}{n!} = e^{-3(t-5)} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

iv)

$$\vec{y}(t) = exp((t-t_0)A)\vec{y}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((t-t_0)A)^n \vec{y}_0}{n!} \underbrace{=}_{y_0 \ ist\ E.V.} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((t-t_0)\lambda)^n \vec{y}_0}{n!} = e^{-1(t-5)} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$