Differentialgleichungen

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
☐	☐	Die Lösung einer DGL ist ein Vektor.
☐	☐	Differentialgleichungen sind, anders als lineare Gleichungen, immer eindeutig Lösbar.
☐	☐	Die Exponentialreihe einer Matrix ist die Matrix der Exponentialreihe der Einträge.
☐	☐	Die allgemeine Lösung eines AWP einer linearen DGL mit konstanten Koeffizienten A ist mit $y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0$ gegeben.

1. Aufgabe : Lösen Sie die folgenden homogenen Differentialgleichungen :

i) $y'(t) = -2 \cdot y(t)$ ii) $y'(t) = -2 \cdot t \cdot y(t)$ iii) $y'(t) = \frac{y(t)}{t}$ iv) $y'(t) = \cos(t)y(t)$

2. Aufgabe : Lösen Sie die folgenden nicht homogenen Differentialgleichungen

i) $y'(t) = e^{2\cdot t} - e^t \cdot y(t),\ auf\ \mathbb{R}$ ii) $y'(t) = \frac{e^t - y(t)}{t}, auf\ [a, \infty[\ mit\ a > 0$

3. Aufgabe : Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme

i) $\begin{cases} y'(t) = \frac{y(t)+1}{t}, & t \in]0, \infty[\\ y(1) = 0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} y'(t) = 3 \cdot y(t) + e^{2\cdot t}, & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 3 \end{cases}$

4. Aufgabe : Bestimmen Sie die Exponentialreihe der folgenden Matrizen :

i) $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ii) $A_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}$ iii) $A_3 = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{bmatrix}$

5. Aufgabe : Beweisen Sie, dass die folgende Aussage für alle invertierbaren Matrizen S gilt :

$$exp(S^{-1}AS) = S^{-1}exp(A)S$$

6. Aufgabe : Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen :

i) $$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -15 & 6 \end{bmatrix} \vec{y}(t) \\ \\ \vec{y}(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

ii) $$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \vec{y}(t) \\ \\ \vec{y}(5) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

iii) $$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} -8 & 5 & 0 \\ -10 & 7 & 0 \\ -5 & 5 & -3 \end{bmatrix} \vec{y}(t) \\ \\ \vec{y}(5) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

iv) $$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{y}(t) \\ \\ \vec{y}(5) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$