# Eigenwerte - Lösung

**Selbsttest :** Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

| Wahr | Falsch | Aufgabe |
|---|---|---|
| ☒ | ☐ | Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes ist größergleich seiner geometrischen Vielfachheit. |
| ☒ | ☐ | Setzt man die Matrix $A$ in das zugehörige Charakteristisches-polynom ein, so erhält man die Nullabbildung. |
| ☒ | ☐ | Ist $\lambda$ ein Eigenwert von $A$, so ist $\lambda^2$ ein Eigenwert von $A^2$. |
| ☐ | ☒ | Ist $\lambda$ ein Eigenwert von $A^2$, so ist $\sqrt{\lambda}$ ein Eigenwert von $A$. |

**1. Aufgabe :**

**i)**

$$p_B(\lambda) = det(B - \lambda I_3) = det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) \underset{1.Zeile}{\overset{Laplace}{=}} (3-\lambda)det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$
$$= (3-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda)-2] = (3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda) = -\lambda(3-\lambda)^2$$

**ii)** Die Eigenwerte von $B$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_B$. Diese sind gegeben mit $\lambda_1 = 0, \ \lambda_{2,3} = 3$. Die algebraische Vielfachheit von $\lambda_1$ ist 1, die von $\lambda_{2,3}$ ist 2, da $\lambda_1$ eine einfache und $\lambda_{2,3}$ eine doppelte Nullstelle von $p_B$ ist.

**iii)** Wir bestimmen hierzu die Eigenräume der jeweiligen Eigenwerte und wählen aus diesen drei linear unabhängige Eigenvektoren aus.

$$V_{\lambda_1} = ker(B - \lambda_1 I_3) = ker\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases} \Rightarrow V_{\lambda_1} = Span\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$V_{\lambda_2} = ker(B - \lambda_2 I_3) = ker\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \{\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \ \Leftrightarrow \{\ x_1 = x_2 + x_3 \ \Rightarrow V_{\lambda_2} = Span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Aus diesen Eigenräumen können nun drei linear unabhängige Eigenvektoren gewählt werden. Ein Beispiel sind die drei Vektoren die die Räume aufspannen.

**2. Aufgabe :**

**i)** Das charakteristische Polynom ist
$det\left(\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{bmatrix}\right) = -(a^2-\lambda^2)-b^2 = \lambda^2-(a^2+b^2)$,
also sind die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a^2+b^2}$.

**ii)** Für die Orthogonalität muss $LL^T = E_2$ gelten. Da

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ist $a^2+b^2=1$ die Bedingung für die Orthogonalität.

**3. Aufgabe :**

**i)** Für das charakteristische Polynom von $A$ gilt :

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = det(A-\lambda I_3) = det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 5 & -\lambda \end{bmatrix}\right) &= (2-\lambda)\ [(2-\lambda)(-\lambda)+1] \\ &= (2-\lambda)\ [\lambda^2-2\lambda+1] = (2-\lambda)\ (\lambda-1)^2 \end{aligned}$$

Da die Eigenwerte von A die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A sind, lesen wir für sie aus der letzten Gleichung ab :
$\lambda_1 = 2$ (algebraische Vielfachheit : 1)
$\lambda_2 = 1$ (algebraische Vielfachheit : 2)

**ii)** Wir bestimmen die Eigenräume der jeweiligen Eigenwerte.

$$V_{\lambda_1} = ker(A - \lambda_1 I_3) = ker\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 9 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 9x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{x_3}{2} \\ x_1 = -\frac{9}{2}x_3 \end{cases} \Rightarrow V_{\lambda_1} = Span\left(\begin{bmatrix} -\frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$V_{\lambda_2} = ker(B - \lambda_2 I_3) = ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow V_{\lambda_2} = Span\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

**4. Aufgabe :** Wir zeigen, dass beide Matrizen das gleiche charakteristische Polynom haben. Hieraus folgt dann direkt die Behauptung.

$$\begin{aligned} det(D - \lambda I) &= det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S) = det(S^{-1}(A - \lambda I)S) = det(S^{-1})\ det(A - \lambda I)\ det(S) \\ &= det(S^{-1})\ det(S)\ det(A - \lambda I) = det(S^{-1}S)\ det(A - \lambda I) = det(I)\ det(A - \lambda I) \\ &= det(A - \lambda I) \end{aligned}$$

**5. Aufgabe :** Analog zu Aufgabe 1, 2, 3.

**6. Aufgabe :**

**i)** Die Determinante der Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente, also ist $det(B) = 5\ (-3)\ 1\ 4 = -60$.

**ii)** Ja, B hat reelle Eigenwerte. Diese sind, da B eine Dreiecksmatrix ist, gerade die Einträge auf der Hauptdiagonalen, also $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda 3 = 1$ und $\lambda_4 = 4$. Alle zugehörigen Eigenräume habe die Dimension 1, denn $B$ hat vier verschiedene Eigenwerte.