Eigenwerte

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
☐	☐	Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes ist größergleich seiner geometrischen Vielfachheit.
☐	☐	Setzt man die Matrix A in das zugehörige Charakteristisches-polynom ein, so erhält man die Nullabbildung.
☐	☐	Ist λ ein Eigenwert von A, so ist λ^2 ein Eigenwert von A^2.
☐	☐	Ist λ ein Eigenwert von A^2, so ist $\sqrt{\lambda}$ ein Eigenwert von A.

1. Aufgabe : Gegeben sei die Matrix $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

i) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_B von B.
ii) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B sowie die jeweiligen algebraischen Vielfachheiten.
iii) Geben Sie, wenn möglich, drei linear unabhänginge Eigenvektoren von B an.

2. Aufgabe : Seien $a,\ b \in \mathbb{R}$, und sei die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $L = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$.

i) Bestimmen Sie die Eigenwerte von L in Abhängigkeit von a und b.
ii) Bestimmen Sie alle $a,\ b$ für die L orthogonal ist.

3. Aufgabe : Gegeben sei die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ und $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

i) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A und bestimmen Sie die Eigenwerte von A.
ii) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.

4. Aufgabe : Durch einen Basiswechsel kann die Form einer Matrix geändert werden. Eine solche Transformation ist eine Ähnlichkeitstransformation der Form $D = S^{-1}AS$, wobei S die Transformationsmatrix ist und A die Ausgangsmatrix. Beweisen Sie, dass eine solche Transformation die Eigenwerte der Matrix A nicht ändert.

5. Aufgabe : Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ und jeweils die zugehörige geometrische und algebraische Vielfachheit.

6. Aufgabe : Betrachten Sie die Matrix $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & \frac{5}{61} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ als lineare Abbildung auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^4$.

i) Geben Sie die Determinante von B an.
ii) Hat B reelle Eigenwerte ? Falls ja, welche ? Welche Dimensionen haben die zugehörigen Eigenräume ?