Euklidische und unitäre Vektorräume - Lösung

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
☒	☐	Zwei Vektoren stehen senkrecht zu einander (sind orthogonal), falls das Skalarprodukt beider Vektoren gleich null ist.
☒	☐	Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalaprodukt des euklidischen Vektorraumes und $\|\| \cdot \|\|$ die assozierte Norm. Dann gilt für alle $\vec{x},\ \vec{y} \in V$: $\|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\| \leq \|\|\vec{x}\|\|\ \|\|\vec{y}\|\|$
☐	☒	Die Dreiecksungleichung $\|\|\vec{x}\|\| + \|\|\vec{y}\|\|$ gilt nicht für alle Normen.

1. Aufgabe : Um festzustellen ob die Vektoren orthogonal bzgl. des Standardskalarproduktes sind, ist zu überprüfen, ob dieses Null ist :

a) $\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$

b) $\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$

c) Das gegebene System ist keine Basis.

2. Aufgabe :

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{v}_1}{||\vec{v}_1||} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{l}_2 = \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{50}{25} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = \frac{l_2}{||l_2||} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

3. Aufgabe :

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = -2 + 6 + 0 = 4 \neq 0 \tag{1}$$

Die beiden Vektoren sind folglich nicht orthogonal.

4. Aufgabe :

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{v}_1}{||\vec{v}_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\vec{l}_2 = \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2,\ \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\vec{w}_2 = \frac{\vec{l}_2}{||\vec{l}_2||} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\vec{l}_3 = \vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3,\ \vec{w}_2 \rangle \vec{w}_2 - \langle \vec{v}_3,\ \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-3}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\vec{w}_3 = \frac{\vec{l}_3}{||\vec{l}_3||} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5. Aufgabe :

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$B \cdot B^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$C \cdot C^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Es ist damit nur die Matrix A orthogonal.

6. Aufgabe :

i)

$$\begin{aligned} \vec{q}_1 &= \frac{\vec{v}_1}{||\vec{v}_1||} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{l}_2 &= \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{2}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} \\ \vec{q}_2 &= \frac{\vec{l}_2}{||\vec{l}_2||} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

ii)

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow R = Q^{-1}A &= Q^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

iii)

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 - (-1) - 0 + 0 = 1 \neq 0 \tag{4}$$

7. Aufgabe : QR-Zerlegung einer Matrix A bedeutet, dass Q orthogonal, R obere Dreiecksmatrix und $A = QR$ gilt. Da Q orthogonal sein soll müssen die Spalten von Q, also insb. auch die ersten beiden Spalten orthogonal zueinander sein. Also

$$0 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \right\rangle = q$$

, d.h. $q = 0$. Da R obere Dreiecksmatrix ist , muss $r = 0$ sein. Die fehlenden Einträge von R kann man über Skalarprodukte berechnen :

$$\begin{aligned} s = r_{2,3} = \langle \vec{q}_2, \vec{a}_3 \rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ? \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix} \right\rangle = -\frac{8}{5} + \frac{33}{5} = 5 \\ t = r_{3,3} = \langle \vec{q}_3, \vec{a}_3 \rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ? \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{6}{5} + \frac{44}{5} = 10 \end{aligned}$$