Euklidische und unitäre Vektorräume

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
☐	☐	Zwei Vektoren stehen senkrecht zu einander (sind orthogonal), falls das Skalarprodukt beider Vektoren gleich null ist.
☐	☐	Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalaprodukt des euklidischen Vektorraumes und $\|\|\cdot\|\|$ die assozierte Norm. Dann gilt für alle $\vec{x},\ \vec{y} \in V$: $\|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle\| \leq \|\|\vec{x}\|\|\ \|\|\vec{y}\|\|$
☐	☐	Die Dreiecksungleichung $\|\|\vec{x}\|\| + \|\|\vec{y}\|\|$ gilt nicht für alle Normen.

1. Aufgabe : Gegeben sei der Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$, versehen mit dem Standardskalarprodukt. Welche der folgenden Mengen bilden eine orthonormale Basis ? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$A := \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad B := \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad C := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

2. Aufgabe : Gegeben seien die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ an, um eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bzgl. des Standardskalarproduktes zu erhalten.

3. Aufgabe : Gegeben sei das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_b$ im $\mathbb{R}^3$ mit $\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \right\rangle_b = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3$. Sind die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ orthogonal bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_b$?

4. Aufgabe : Gegeben seien die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ an, um eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bzgl. des Standardskalarproduktes zu erhalten.

5. Aufgabe : Welche der folgenden Matrizen ist (oder sind) orthogonal ?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad C := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Aufgabe : Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$. Es sei $\vec{v}_i$ der $i-$te Spaltenvektor von A.

i) Benutzen Sie das Gram-Schmidt Verfahren, um die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ in eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B} = (\vec{q}_1,\ \vec{q}_2)$ des $\mathbb{R}^2$ (bzgl. des Standardskalarproduktes) zu überführen.

ii) Bestimmen Sie eine QR-Faktorisierung der Matrix A.

iii) Gegeben sei nun ein Skalarprodukt des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ durch $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$. Sind $\vec{q}_1$ und $\vec{q}_2$ bezüglich dieses Skalarproduktes orthogonal ?

7. Aufgabe : Zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sind Matrizen $Q = \begin{bmatrix} 1 & q & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ und $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & s \\ r & 0 & t \end{bmatrix}$ gegeben. Von A sind die Einträge $a_{2,3} = 2$ und $a_{3,3} = 11$ bekannt. Bestimmen Sie $q,\ r,\ s,\ t \in \mathbb{R}$ so, dass Sie mit Q und R eine QR- Zerlegung von A erhalten.