

1 Komplexe Zahlen

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$i = \sqrt{-1}$
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	$\bar{z} = -z, \forall z \in \mathbb{C}$
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$i = i^{1+4n}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ (mit \mathbb{N}_0 ist die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null gemeint)
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	$ z = a^2 + b^2$ wobei $z = a + i \cdot b$ gilt
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$ z = 1 \Leftrightarrow z^k = 1, \forall k \in \mathbb{R}$

1. Aufgabe : Berechnen Sie die folgenden Produkte und Summen. Stellen Sie das Ergebnis in der Form $a + i \cdot b$ dar, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ gilt :

i) $(6 + i \cdot 2) + (2 + i \cdot 6) = 8 + i \cdot 8$

ii) $(6 + i \cdot 2)(2 + i \cdot 6) = i \cdot 40$

iii) $(2 - i \cdot 5) + (-2 + i \cdot 6) = i$

iv) $(3 + 8i)(3 - 8i) = 73$

2. Aufgabe : Gegeben seien zwei komplexe Zahlen $z_1 = 4 + 7i$ und $z_2 = 3 - 4i$. Bestimmen Sie :

i) Real- und Imaginärteil der Zahlen z_1 und z_2

$$\operatorname{Re}(z_1) = 4; \operatorname{Im}(z_1) = 7; \operatorname{Re}(z_2) = 3; \operatorname{Im}(z_2) = -4$$

ii) Den Betrag der Zahlen z_1 und z_2

$$|z_1| = \sqrt{65}; |z_2| = 5$$

iii) Produkt und Summe der Zahlen z_1 und z_2 sowie deren Real- und Imaginärteil

$$\tilde{z} := z_1 z_2 = 40 + 5i; \operatorname{Re}(\tilde{z}) = 40; \operatorname{Im}(\tilde{z}) = 5;$$

$$w := z_1 + z_2 = 7 + 3i; \operatorname{Re}(w) = 7; \operatorname{Im}(w) = 3$$

iv) Den Quotienten der Zahlen z_1 und z_2 (also : $\frac{z_1}{z_2}$) sowie den Real- und Imaginärteil

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{-16+37i}{25} = -\frac{16}{25} + \frac{37}{25}i$$

3. Aufgabe : Gegeben sind die komplexen Zahlen :

$$z_1 = 2 + 3i; z_2 = 3 + i; z_3 = i; z_4 = 5.$$

Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil, den Betrag und die komplex konjugierte Zahl von :

$$z_3; z_4; -z_1; \bar{z}_2; z_1 z_3; z_2 z_4; z_1 / z_3$$

Was ist hier festzustellen ?

$Re(z_3) = 0$	$Im(z_3) = 1$	$ z_3 = 1$	$\bar{z}_3 = -i$
$Re(z_4) = 5$	$Im(z_4) = 0$	$ z_4 = 5$	$\bar{z}_4 = 5$
$Re(-z_1) = -2$	$Im(-z_1) = -3$	$ -z_1 = \sqrt{13}$	$\overline{-z_1} = -2 + 3i$
$Re(\bar{z}_2) = 3$	$Im(\bar{z}_2) = -$	$ \bar{z}_2 = \sqrt{10}$	$\overline{\bar{z}_2} = 3 + i$
$Re(z_1 z_3) = -3$	$Im(z_1 z_3) = 2$	$ z_1 z_3 = \sqrt{13}$	$\overline{z_1 z_3} = -3 - 2i$
$Re(z_2 z_4) = 15$	$Im(z_2 z_4) = 5$	$ z_2 z_4 = 5\sqrt{10}$	$\overline{z_2 z_4} = 15 - 5i$
$Re(z_1/z_3) = 3$	$Im(z_1/z_3) = -2$	$ z_1/z_3 = \sqrt{13}$	$\overline{z_1/z_3} = 3 + 2i$

4. Aufgabe :

ACHTUNG : Die Mengen M_2 und M_3 sind im Eifer des Gefechts in den Fachmentorien nicht richtig angezeichnet worden. Es wird hierzu nächste Woche einen kurzen Nachtrag geben. Die unten stehenden Lösungen sind jedoch korrekt.

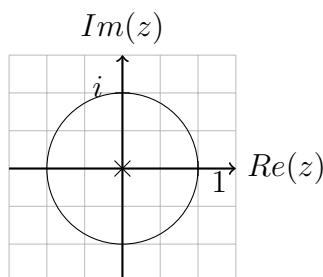


FIGURE 1 – Obige Abbildung zeigt die Menge $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

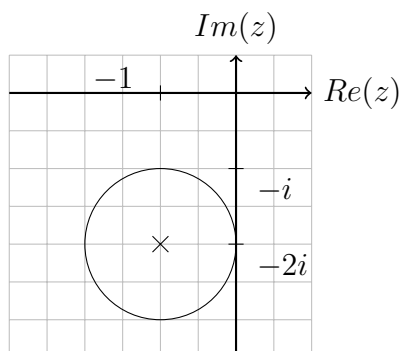


FIGURE 2 – Obige Abbildung zeigt die Menge $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + z_1| = 1; z_1 = 1 + 2i\}$

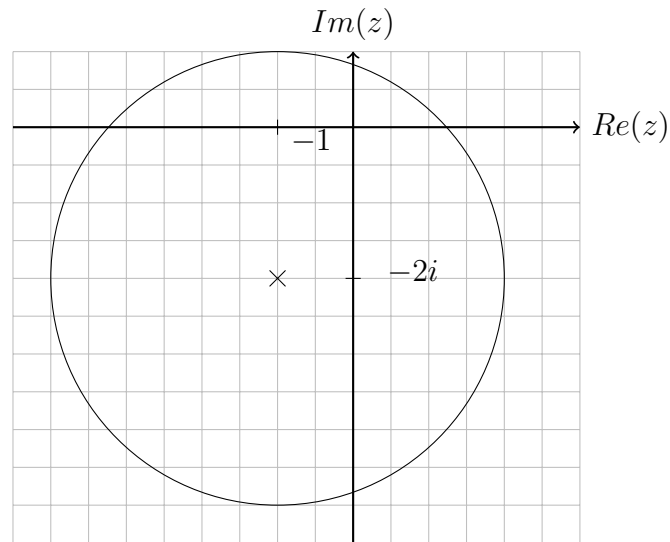


FIGURE 3 – Obige Abbildung zeigt die Menge $M_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + z_1| = 3; z_1 = 1 + 2i\}$

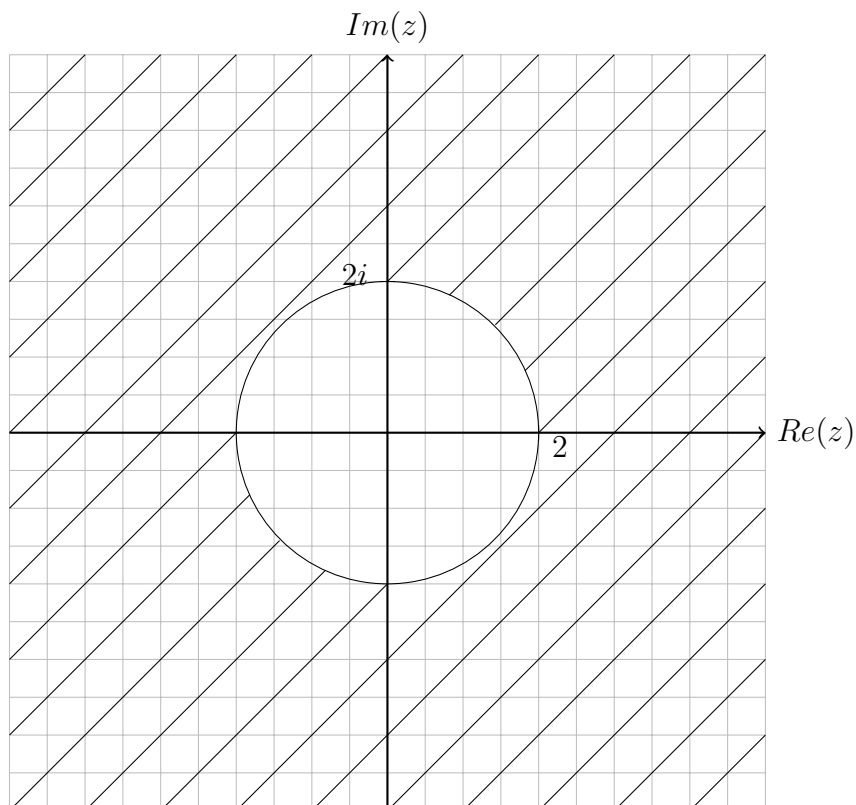


FIGURE 4 – Obige Abbildung zeigt die Menge $M_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 2\}$. Diese entspricht der schraffierte Menge

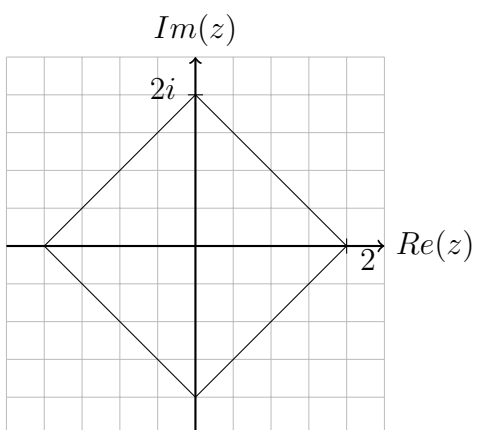


FIGURE 5 – Obige Abbildung zeigt die Menge $M_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) + Im(z) = 2\}$