Koordinatentransformation - Lösung

Koordinatentransformation

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
☒	☐	Koordinatenvektoren sind eindeutig bzgl. einer Basis
☐	☒	$\kappa_{\mathfrak{B}} : V \to \mathbb{K}$, wobei V ein $d-$dimensionaler $\mathbb{K}-$V.R. ist.
☒	☐	Verändert man die Reihenfolge der Elemente einer Basis, so ändert sich der Koordinatenvektor.
☐	☒	Die Koordinatentransformation bildet Elemente der einen Basis auf Elemente der anderen ab.

1. Aufgabe :

a) Gesucht sind diejenigen Koeffizienten $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ so, dass die folgende Gleichung erfüllt ist :

$$2x^2 + 3x + 4 = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 1$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir direkt durch Koeffizientenvergleich, dass :

$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = 4$ und folglich ist der Koordinatenverktor gegeben durch : $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

b) Wir gehen hier analog vor. Zunächst bestimmen wir die zu lösende Gleichung :

$$2x^2 + 3x + 4 = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 2x + \alpha_3 2$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir direkt durch Koeffizientenvergleich, dass :

$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = \frac{3}{2},\ \alpha_3 = 2$ und folglich ist der Koordinatenverktor gegeben durch : $\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$

2. Aufgabe : Die Bestimmung des Koordinatenvektors entspricht dem Lösen eines lineare Gleichungssystems. Wir bestimmen folglich die erweiterte Koeffizientenmatrix und wenden den Gaußalgorithmus an.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\widetilde{I} = -\frac{I-2II+3III}{3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\widetilde{II} = II-2III-2I}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Damit ist die Lösung der linearen Gleichungssystems der Koordinatenvektor $v_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

3. Aufgabe : Wir suchen diejenigen α_1 und α_2 so, dass $2x+3 = \alpha_1(x+1)+\alpha_2(x-1)$. Die Gleichung ist äquivalent zu

$$2x+3 = (\alpha_1+\alpha_2)x + (\alpha_1-\alpha_2)$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \alpha_1 = \frac{5}{2},\ \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

Also ist $v_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

4. Aufgabe : Wir verfahren hier analog zu der vorherigen Ausgabe. Wir suchen diejenigen $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ so, dass $-2x^2-x+3 = \alpha_1(x^2-2x+1)+\alpha_2(x-4)+\alpha_3(x^2+2x)$. Die Gleichung ist äquivalent zu

$$-2x^2-x+3 = (\alpha_1+\alpha_3)x^2 + (-2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)x + (\alpha_1-4\alpha_2)$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 15 & -15 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = -1$$

Also ist $v_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

5. Aufgabe : Wir untersuchen nun die allgemeine Abbildung, welche uns einen beliebigen Vektor auf den zugehörigen Koordinatenvektor bzgl. einer festen Basis abbildet.

a) Wir wollen nun die Gleichung $ax^2+bx+c = \alpha_1x^2+\alpha_2 2x+\alpha_3 2$ lösen. Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 & b \\ 0 & 0 & 2 & c \end{array}\right] \to \alpha_1 = a,\ \alpha_2 = \frac{b}{2},\ \alpha_3 = \frac{c}{2}$$

Wir können nun die vollständige Abbildung angeben :

$$K_{\mathfrak{B}} : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^3; ax^2+bx+c \mapsto \begin{bmatrix} a \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{bmatrix}$$

b) Wir verfahren hierbei anlog zu Aufgabenteil a) und erhalten

1.Aufgabe a) $K_{\mathfrak{B}_1} : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^3; ax^2 + bx + c \mapsto \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

b) $K_{\mathfrak{B}_2} : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^3; ax^2 + bx + c \mapsto \begin{bmatrix} a \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{bmatrix}$

2. Aufgabe $K_{\mathfrak{B}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b \\ \frac{1}{2}c \\ -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - c \end{bmatrix}$

3.Aufgabe $K_{\mathfrak{B}} : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}^2; ax + b \mapsto \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \end{bmatrix}$

4. Aufgabe $K_{\mathfrak{B}} : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^3; ax^2 + bx + c \mapsto \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 8a - 4b - c \\ 2a - b - 4c \\ 7a + 4b + c \end{bmatrix}$

6.Aufgabe :

a) Wir bestimmen zunächst die Koordinatenvektoren der Basis Elemente der Basis $\mathfrak{B}_1$ bzgl. der Basis $\mathfrak{B}_2$. Dies entspricht der Lösung der folgenden LGSe

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \alpha_{1,1} = 0,\ \alpha_{2,1} = 1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \alpha_{1,2} = 1,\ \alpha_{2,2} = 0$$

Die Transformationsmatrix des Basiswechsels besitzt die Koordinatenvektoren der Basiselemente als Spalten. Entsprechend gibt :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Wir bestimmen zunächst die Koordinatenvektoren der Basis Elemente der Basis $\mathfrak{B}_1$ bzgl. der Basis $\mathfrak{B}_2$. Dies entspricht der Lösung der folgenden LGSe

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{5}{7} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -\frac{3}{7} \\ 1 & 0 & -\frac{5}{7} \end{array}\right] \Rightarrow \alpha_{1,1} = -\frac{5}{7},\ \alpha_{2,1} = -\frac{3}{7}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{3}{7} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 1 & 0 & -\frac{3}{7} \end{array}\right] \Rightarrow \alpha_{1,2} = -\frac{3}{7},\ \alpha_{2,2} = \frac{1}{7}$$

Die Transformationsmatrix des Basiswechsels besitzt die Koordinatenvektoren der Basiselemente als Spalten. Entsprechend gibt :

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Wir bestimmen zunächst die Koordinatenvektoren der Basis Elemente der Basis $\mathfrak{B}_1$ bzgl. der Basis $\mathfrak{B}_2$. Dies entspricht der Lösung der folgenden LGSe

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -5 \\ -1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 10 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \alpha_{1,1} = 1,\ \alpha_{2,1} = -2,\ \alpha_{3,1} = 2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \alpha_{1,2} = -1,\ \alpha_{2,2} = -1,\ \alpha_{3,2} = 2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -7 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 6 & -7 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \alpha_{1,3} = -1,\ \alpha_{2,3} = -1,\ \alpha_{3,3} = -1$$

Die Transformationsmatrix des Basiswechsels besitzt die Koordinatenvektoren der Basiselemente als Spalten. Entsprechend gibt :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

d) Wir bestimmen zunächst die Koordinatenvektoren der Basis Elemente der Basis $\mathfrak{B}_1$ bzgl. der Basis $\mathfrak{B}_2$. Dies entspricht der Lösung der folgenden LGSe

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \alpha_{1,1} = 1,\ \alpha_{2,1} = 1,\ \alpha_{3,1} = 1,\ \alpha_{4,1} = 1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \alpha_{1,2} = -1,\ \alpha_{2,2} = 0,\ \alpha_{3,2} = 1,\ \alpha_{4,2} = 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \alpha_{1,3} = 2,\ \alpha_{2,3} = 1,\ \alpha_{3,3} = 1,\ \alpha_{4,3} = 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \alpha_{1,4} = 0,\ \alpha_{2,4} = 0,\ \alpha_{3,4} = 1,\ \alpha_{4,4} = 1$

Die Transformationsmatrix des Basiswechsels besitzt die Koordinatenvektoren der Basiselemente als Spalten. Entsprechend gibt :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Aufgabe : Wir bilden zunächst die Basis Elemente mit der Abbildung ab. Anschließend bestimmen wir die Koordinatenvektoren der Bilder der Basiselemente. Diese Koordinatenvektoren bilden die Spalten der Darstellenden Matrix der Abbildung bzgl. einer gegebenen Basis.

a)

$$L(\vec{b_1}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow \alpha_{1,1} = -2,\ \alpha_{2,1} = 5$$
$$L(\vec{b_2}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \alpha_{1,2} = -1,\ \alpha_{2,2} = 2$$

Die Darstellungsmatrix hat folglich die Gestalt

$$L_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

b)

$$L_{\mathfrak{B}_1} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ -9 & -6 & -1 \\ 29 & 31 & 7 \end{bmatrix}$$
$$L_{\mathfrak{B}_2} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{17}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{10}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

c)

$$L_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} -7 & -5 & 0 \\ 13 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d)

$$L_{\mathfrak{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$L_{\mathfrak{B}_2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

e)

$$L_{\mathfrak{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{\mathfrak{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$