Koordinatentransformation

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
☐	☐	Koordinatenvektoren sind eindeutig bzgl. einer Basis
☐	☐	$\kappa_{\mathfrak{B}} : V \to \mathbb{K}$, wobei V ein $d-$dimensionaler $\mathbb{K}-$V.R. ist.
☐	☐	Verändert man die Reihenfolge der Elemente einer Basis, so ändert sich der Koordinatenvektor.
☐	☐	Die Koordinatentransformation bildet Elemente der einen Basis auf Elemente der anderen ab.

1. Aufgabe : $\mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 | a_2,\ a_1,\ a_0 \in \mathbb{R}\}$ ist der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome von Grad kleiner gleich zwei. $\mathfrak{B}_1 := (x^2,\ x,\ 1)$ und $\mathfrak{B}_2 := (x^2,\ 2x,\ 2)$ zwei Basen von $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Gesucht sind die Koordinaten, sowie der Koordinatenvektor von $v = 2x^2 + 3x + 4 \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

a) bezüglich der Basis $\mathfrak{B}_1$ b) bezüglich der Basis $\mathfrak{B}_2$

2. Aufgabe : Wir betrachten im Folgenden den $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-V.R. mit der Basis

$\mathfrak{B} := \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$. Bestimmen Sie den Koordinatenvektor $v_{\mathfrak{B}} \in \mathbb{R}^3$ von $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Aufgabe : Wir betrachten im Folgenden den $\mathbb{R}$-V.R. $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ der Polynome vom Grad kleiner gleich eins mit der Basis $\mathfrak{B} = (x+1,\ x-1)$. Bestimmen sie den Koordinatenvektor $v_{\mathfrak{B}}$ von $v = 2x + 3 \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$

4. Aufgabe : Wir betrachten im Folgenden den $\mathbb{R}$-V.R. $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ der Polynome vom Grad kleiner gleich zwei mit der Basis $\mathfrak{B} = (x^2 - 2x + 1,\ x - 4,\ x^2 + 2x)$. Bestimmen sie den Koordinatenvektor $v_{\mathfrak{B}}$ von $v = -2x^2 - x + 3 \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

5. Aufgabe : Bestimmen Sie die Koordinatenabbildung zu

a) $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ mit der Basis $\mathfrak{B} = (x^2,\ 2x,\ 2)$.
b) Zu den Aufgaben $1 - 4$.

6. Aufgabe : Bestimmen Sie die Transformationsmatrix des Basiswechsels von $\mathfrak{B}_1$ nach $\mathfrak{B}_2$.

a) $\mathfrak{B}_1 = (x+1,\ x-1)$ und $\mathfrak{B}_2 = (x-1,\ x+1)$ zwei Basen des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$.
b) $\mathfrak{B}_1 = (x+1,\ x-1)$ und $\mathfrak{B}_2 = (-2x+1,\ x-4)$ zwei Basen des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$.
c) $\mathfrak{B}_1 = (5x^2-5x+5,\ 5x^2-3x+6,\ -7x^2+3x)$ und
$\mathfrak{B}_2 = (x^2-x-1,\ 2x^2-1,\ 4x^2-2x+2)$ zwei Basen des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

d) $\mathfrak{B}_1 = \left(\begin{bmatrix}8 & 5\\4 & 8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}9 & 6\\4 & 8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 4\end{bmatrix}\right)$ und

$\mathfrak{B}_2 = \left(\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\right)$, zwei Basen des $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

7. Aufgabe : Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der folgenden linearen Abbildungen bzgl. der angegebenen Basen.

a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}3x-2y\\5x-3y\end{bmatrix}$, Basis $\mathfrak{B} = \left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$

b) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}2x+2y+z\\x+y+z\\y+4z\end{bmatrix}$, Basis $\mathfrak{B}_1 = \left(\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ und

$\mathfrak{B}_2 = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right)$

c) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}x-y\\x+y\\0\end{bmatrix}$, Basis $\mathfrak{B} = \left(\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$

d) $L : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ mit $ax^2+bx+c \mapsto 2ax+b$ mit Basis $\mathfrak{B}_1 = (1,\ x,\ x^2)$ und $\mathfrak{B}_2 = ((x-1)^2,\ x^2,\ (x+1)^2)$

e) $L : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ mit $ax^3+bx^2+cx+d \mapsto 3ax^2+2bx+c$ mit
Basis $\mathfrak{B}_1 = (x^3,\ x^2,\ x,\ 1)$ und $\mathfrak{B}_2 = (\frac{1}{6}x^3,\ \frac{1}{2}x^2,\ x,\ 1)$