LGS 1 - Lösungen

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
☒	☐	Der Zeilenrang einer Matrix ist gleich dem Spaltenrang.
☒	☐	Ein quadratisches LGS der Größe n ist eindeutig lösbar genau dann, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich n ist.
☐	☒	Die Lösungsmenge eines homogenen LGS mit Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, ist ein **echter** Teilraum des Kerns von A.
☐	☒	Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Dann ist $\dim(Ker(A)) \leq n$
☒	☐	Eine lineare Abbildung ist genau dann injektiv, wenn die Koeffizientenmatrix $A \in K^{m\times n}$ vollen Spaltenrang hat : $\text{rang}(A) = n$

1. Aufgabe : Bilden Sie zu den folgenden linearen Gleichungssystemen (LGS) die erweiterten Koeffizientenmatrizen :

i) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right]$ ii) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{array}\right]$ iii) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 7 & 2 \end{array}\right]$ iv) $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

2. Aufgabe : Bestimmen Sie die Lösungen der LGS aus Aufgabe 1.

i) $L = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ ii) $L = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\}$

iii) $L = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(1-t) \\ \frac{1}{3}(4t-1) \\ t \end{bmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\}$ iv) $L = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

3. Aufgabe : Betrachten Sie die folgenden LGS und erklären Sie warum diese keine, eine oder unendlich viele Lösungen haben :

i) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 1 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 2 \\ 22 & 5 & 13 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 1 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 2 \\ 2\cdot 7+8 & 2\cdot 2+1 & 2\cdot 4+5 & 2\cdot 2+1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 1 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

In dieser Darstellung sehen wir direkt, dass die Matrix den Rang zwei hat (die Zeilen sind linear unabhängig). Damit gilt für die Dimension der Lösungsmenge $n - Rang(A) = 3 - 2 = 1$. Damit gibt es unendlich viele Lösungen.

ii) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 1 \\ 7 & 9 & 8 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 9 & 8 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{7}{4} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{4} \end{array}\right]$$

Wir sehen, dass die letzte Zeile nicht Sinnvoll ist. Es gibt also keine Lösung dieser Gleichung. Man spricht bei dieser Beweisführung von "Reductio ad absurdum".

$$\text{iii)} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -23 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Die obige Rechnung versucht nicht das LGS zu lösen, sondern sie prüft ob die drei Spaltenvektoren linear unabhängig sind. Das Ergebnis zeigt genau das. Wir können hieraus folgern, dass der Rang der Matrix gleich drei ist. Damit existiert genau eine Lösung.

4. Aufgabe : Bestimmen Sie eine Basis des Kerns und des Bilds der Koeffizientenmatrizen aus Aufgabe 3.

$$\text{i)} \quad \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{9}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & \frac{16}{3} \\ 0 & \frac{9}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wir haben nun die Matrix in die normierte Zeilenstufenform gebracht. Um eine Basis des Kerns zu finden, suchen wir alle Lösungen der homogenen Gleichung. Dies ergibt :

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}t \\ \frac{1}{3}t \\ t \end{bmatrix} |t \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \mathcal{B}_{Ker} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Die Menge $\mathcal{B}_{Ker}$ ist eine Basis des Kerns. Eine Basis des Bildraumes findet man in dem man eine Basis des Spaltenraums bestimmt. Aus der normierten Zeilenstufenform können wir entnehmen, dass die ersten Beiden Spalten linear unabhängig sind (Es sind hier jedoch auch andere Vektoren möglich !). Eine Basis des Bildraums ist also gegeben durch :

$$B_{Im} = \left\{ \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 20 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wir haben nun die Matrix in die normierte Zeilenstufenform gebracht. Um eine Basis des Kerns zu finden, suchen wir alle Lösungen der homogenen Gleichung. Dies ergibt :

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} -5t \\ 3t \\ t \end{bmatrix} |t \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \mathcal{B}_{Ker} = \left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Die Menge $\mathcal{B}_{Ker}$ ist eine Basis des Kerns. Eine Basis des Bildraumes findet man in dem man eine Basis des Spaltenraums bestimmt. Aus der normierten Zeilenstufenform können wir entnehmen, dass die ersten Beiden Spalten linear unabhängig sind (Es sind hier jedoch auch andere Vektoren möglich !). Eine Basis des Bildraums ist also gegeben durch :

$$B_{Im} = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

iii) Wir haben bereits in Aufgabe 3 gesehen, dass die Matrix in normierter Zeilenstufenform die Einheitsmatrix ist. Daraus können wir direkt schließen, dass der Kern nur aus dem Nullvektor besteht. Weiter schließen wir, dass der Spaltenraum der $\mathbb{R}^3$ ist. Wir können somit eine beliebige Basis des $\mathbb{R}^3$ als Bildraumbasis wählen, beispielsweise die kanonische Basis $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

5. Aufgabe : Gegeben seien $A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, $\vec{b} := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{x_p} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $Ker(A)$ ist die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{0}$. Aus $a)$ folgt, dass x_3 und x_4 Nichtkopfvariablen sind. Setze $x_3 := s \in \mathbb{R}$ und $x_4 := t \in \mathbb{R}$. Für die Kopfvariablen gilt dann $x_1 + 2s - t = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2s + t$ und $x_2 - 2s + 3t = 0 \Leftrightarrow x_2 = 2s - 3t$. Somit ist

$$Ker(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -2s+t \\ 2s-3t \\ s \\ t \end{bmatrix} | s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} | s, t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) Die Lösungsmenge eines inhomogenen LGS setzt sich aus einer partikulären Lösung des inhomogenen LGS und den Lösungen des zugehörigen homogenen LGS, also dem Kern, zusammen. Mit der gegebenen partikulären Lösung und b) ist dann

$$\mathcal{L} = \vec{x_p} + Ker(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} | s, t \in \mathbb{R} \right\}$$