LGS 1

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
☐	☐	Der Zeilenrang einer Matrix ist gleich dem Spaltenrang.
☐	☐	Ein quadratisches LGS der Größe n ist eindeutig lösbar genau dann, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich n ist.
☐	☐	Die Lösungsmenge eines homogenen LGS mit Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, ist ein **echter** Teilraum des Kerns von A.
☐	☐	Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Dann ist $\dim(Ker(A)) \leq n$
☐	☐	Eine lineare Abbildung ist genau dann injektiv, wenn die Koeffizientenmatrix $A \in K^{m\times n}$ vollen Spaltenrang hat : $\text{rang}(A) = n$

1. Aufgabe : Bilden Sie zu den folgenden linearen Gleichungssystemen (LGS) die erweiterten Koeffizientenmatrizen :

i) $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned}$ ii) $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 4x + 4y &= 4 \end{aligned}$ iii) $\begin{aligned} 2x-y+2z&=1 \\ x-2y+3z&=1 \\ x-5y+7z&=2 \end{aligned}$ iv) $\begin{aligned} 4x+3y-z&=3 \\ y+z&=2 \\ z&=1 \end{aligned}$

2. Aufgabe : Bestimmen Sie die Lösungen der LGS aus Aufgabe 1.

3. Aufgabe : Betrachten Sie die folgenden LGS und erklären Sie warum diese keine, eine oder unendlich viele Lösungen haben :

i) $\begin{aligned} 8x+y+5z&=1 \\ 7x+2y+4z&=2 \\ 22x+5y+13z&=5 \end{aligned}$ ii) $\begin{aligned} 2x+3y+1z&=0 \\ 4x+5y+5z&=1 \\ 7x+9y+8z&=0 \end{aligned}$ iii) $\begin{aligned} x+2z&=7 \\ 4x-y+3z&=2 \\ 6x+3y+2z&=4 \end{aligned}$

4. Aufgabe : Bestimmen Sie eine Basis des Kerns und des Bilds der Koeffizientenmatrizen aus Aufgabe 3.

5. Aufgabe : Gegeben seien $A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, $\vec{b} := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und

$$\vec{x_p} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Bestimmen Sie die normierte Zeilenstufenform der Matrix A.
(b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von A.
(c) Es gilt $A\vec{x_p} = \vec{b}$. D.h.,$\vec{x_p}$ ist eine partikuläre/spezielle Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{b}$

(Klausur 2012.10)