LGS 2 - Lösung

1. Aufgabe :

(a) (3 Punkte)

$$[A|\vec{b_1}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[II+I]{III-I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[II+I]{I-2III} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(b) (2 Punkte) Rang(A)$= 2 \neq 3 =$Rang($[A|\vec{b_1}]$), da nach a) zwei bzw. drei Köpfe in der NZSF von A bzw. $[A|\vec{b_1}]$ vorhanden sind. Die Lösungsmenge ist also $\mathcal{L} = \emptyset$.

(c) (1 Punkte) Rang(A)$= 2 < 3 =$ *"Anzahl der Spalten von A"*. Die Spalten von A sind folglich linear abhängig.

(d) (3 Punkte) Da nach a) in der NZSF von A in der ersten und zweiten Spalte Köpfe sind, sind die ersten beiden Spaltenvektoren von A linear unabhängig und bilden ein Erzeugendensystem von Bild(A). Somit ist Bild(A) $= span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ und dim(Bild(A))$= 2$, da der Teilraum von zwei linear unabhängigen Vektoren aufgespannt wird.

(e) (2 Punkte) Nach b) hat $A\vec{x} = \vec{b_1}$ keine Lösung. Somit ist $\vec{b_1} \notin Bild(A)$.
$\vec{b_2}$ ist der dritte Spaltenvektor von A und ist somit im Spann der Spalten von A enthalten, welche ein Erzeugendensystem von Bild(A) bilden. Es gilt also $\vec{b_2} \in Bild(A)$.

2. Aufgabe :

(a) (4 Punkte)

$$[A|I3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[II+2I]{III-3I} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[II+2I]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[I-III]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] = [I3|A^{-1}]$$

(b) (2 Punkte)

$$A\vec{x}=\vec{b} \underset{\text{nach a)} A \text{ invert.}}{\Leftrightarrow} A^{-1}A\vec{x}=A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow I_3\vec{x}=A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow \vec{x}=A^{-1}\vec{b}=\begin{bmatrix}0 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-5\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\1\\-3\end{bmatrix}$$

(c) (2 Punkte) Es gilt :
A nach Aufgabenstellung invertierbar $\Leftrightarrow$ A bijektiv $\Rightarrow$ A surjektiv $\underset{Alin.}{\Leftrightarrow}$ Bild(A)$=\mathbb{R}^3$
A nach Aufgabenstellung invertierbar $\Leftrightarrow$ A bijektiv $\Rightarrow$ A surjektiv $\underset{Alin.}{\Leftrightarrow}$ Kern(A)$=\{\vec{0}\}$

3. Aufgabe :

a) (3 Punkte) Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist $[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0\end{array}\right]$.
Nun überführen wir diese in die normierte Zeilenstufenform (NZSF)

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0\end{array}\right] \underset{II\leftrightarrow III}{\overset{II+I}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4\end{array}\right] \underset{\frac{1}{2}\cdot III}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right] \underset{I-III}{\overset{II-2\cdot III}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 4 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]$$

b) (2 Punkte) Anhand der NZSF sehen wir, x_1, x_2 und x_4 sind die Kopfvariablen und x_3 ist die frei wählbare Nichtkopfvariable. Setze also $x_3=\alpha$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} x1 &= 1-2\alpha\\ x2 &= -4-4\alpha.\\ x4 &= 2\end{aligned}$$

Also ist die Lösungsmenge von $A\vec{x}=\vec{b}$ gegeben durch $\mathcal{L}=\left\{\begin{bmatrix}1\\-4\\0\\2\end{bmatrix}+\alpha\cdot\begin{bmatrix}-2\\-4\\1\\0\end{bmatrix}\middle|\alpha\in\mathbb{R}\right\}$.

c) (2 Punkte) Da in der ersten, zweiten und vierten Spalte der NZSF die Köpfe stehen, bilden die erste, zweite und vierte Spalte der Matrix A die Basis von Bild(A), also ist Basis(Bild(A)) $=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$.

d) (2 Punkte) Durch die Matrixmultiplikation folgt : $m=4$ und $n=3$.

e) (3 Punkte) Aus Aufgabenteil (b) kann man ablesen, dass Kern(A)= $\left\{ \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

.

Insbesondere ist Kern(A)$\neq \{\vec{0}\}$ und somit ist A nicht injektiv. Weiter sieht man aus Aufgabenteil (c) dim Bild(A)$= 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ ($\mathbb{R}^3$= Bildraum). Also ist A surjektiv. Da A nicht injektiv ist, kann A auch nicht bijektiv sein.

f) (2 Punkte) Da A surjektiv ist, ist Bild(A)= $\mathbb{R}^3$, also liegt auch $\begin{bmatrix} 78 \\ -78 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\in$Bild(A).

4. Aufgabe :

(a) (3 Punkte)

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \overset{I\tilde{I}I=I-III}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -a \end{bmatrix} \overset{I\tilde{I}I=II+III}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4-a \end{bmatrix}$$

(b) (2 Punkte) Es ist Rang A = "# Kopfvariablen "(= "Anzahl Nichtnullzeilen") in der ZSF. Rang A = 2, falls $a = 4$, ansonsten ist Rang $A = 3$.

(c) (3 Punkte) Wir betrachten nun zwei Fälle :
$\underline{a = 4}$:

$$A \overset{\tilde{I}=I+II}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ablesen der Gleichungen : $x_1 = -4x_3,\ x_2 = 2x_3$,
Lösungsmenge $\mathcal{L}_{a=4} = \left\{ s \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} | s \in \mathbb{R} \right\}$ $(= span(\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}))$.

$\underline{a \neq 4}$: $\mathcal{L}_{a\neq4} = \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

5. Aufgabe : Jede Basis von $\mathbb{R}^{2,2}$ hat 4 Elemente. Daher reicht zu zeigen, dass die 4 Vektoren linear unabhängig sind. Aufstellen der Gleichung für lin. Unabh.

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da der $\mathbb{R}^{2,2} \cong \mathbb{R}^4$ ist ($\nu_1 = a_{1,1},\ \nu_2 = a_{1,2},\ \nu_3 = a_{2,1},\ \nu_4 = a_{2,2}$) kommen wir auf das folgende LGS :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Also sind die Matrizen linear unabhängig.