LGS 2

1. Aufgabe : Gegeben seien die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und die Vektoren $\vec{b_1} := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{b_2} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die normierte Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b_1}]$.
(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b_1}$.
(c) Sind die Spalten von A linear unabhängig ?
(d) Bestimmen Sie Bild(A) und die Dimension von
Bild(A).
(e) Gilt $\vec{b_1} \in Bild$(A) ? Gilt$\vec{b_2} \in Bild$(A) ?

2. Aufgabe : Gegeben seien die invertierbare Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie A^{-1}.
(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.
(c) Bestimmen Sie Bild(A) und Kern(A).

3. Aufgabe : Gegeben ist das reelle lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit
$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(a) Stellen Sie die erweiterte Koeffzientenmatrix $[A|\vec{b}]$ auf und bringen Sie diese in normierte Zeilenstufenform (NZSF).
(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$.
(c) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von A.
(d) A definiert eine Matrixabbildung $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n;\ \vec{x} \mapsto \vec{x}$. Bestimmen Sie m und n.
(e) Ist die Matrixabbildung $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n;\ \vec{x} \mapsto \vec{x}$ injektiv/surjektiv/bijektiv ?
(f) Überprüfen Sie, ob $\begin{bmatrix} 78 \\ -78 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\in$Bild(A).

4. Aufgabe : Gegeben ist das reelle homogene lineare Gleichungssystem (LGS) : $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 4x_3 - 2x_2 &= 0 \\ x_1 + ax_3 &= 0 \end{aligned}$

(a) Stellen Sie die Koeffizientenmatrix A auf und bringen Sie A in Zeilenstufenform (ZSF).
(b) Bestimmen Sie den Rang von A in Abhängigkeit des Parameters a.
(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS in Abhängigkeit des Parameters a.

5. Aufgabe : Bestimmen Sie, ob $M := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.