Matrizen - Lösung

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
☐	☒	$\forall A,\ B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt $A\ B = B\ A$.
☒	☐	Addition und Multiplikation von oberen Dreiecksmatrizen sind wider obere Dreiecksmatrizen.
☐	☒	Alle symmetrische Matrizen sind selbst adjungiert.
☒	☐	Der Kern von linearen Abbildungen ist ein linearer Teilraum des Urbildraumes.
☒	☐	Orthogonale Matrizen sind invertierbar.

Präsentationsaufgaben :

i) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine antisymmetrische Matrix. Dann gilt :
$a_{i,j} = -a_{j,i}\ \forall i,j$ also auch für $i = j$. Dann ist aber $a_{i,i} = -a_{i,i}\ \forall i$. Damit folgt die Behauptung.

ii) Seien $X, Y \in \mathbb{R}^m$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt :
$L_A(X + \lambda Y) = A(X + \lambda Y) = AX + A\lambda Y = AX + \lambda AY = L_A(X) + \lambda L_A(Y)$. Also ist L_A linear.

1. Aufgabe : Bestimmen Sie die folgenden Matrixprodukte und -summen :

i) $$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 11 & 6\\ 18 & 34 & 20\end{bmatrix}$$

ii) $$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 4 & 2 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}14 & 7 & 22\\ 8 & 4 & 14\\ 26 & 13 & 42\end{bmatrix}$$

iii) $$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & 8\\ 10 & 12\end{bmatrix}$$

iv) $$\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 6\\ 8 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$$

v) $$\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 8\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 8 & 23\\ 0 & 4 & 12\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

vi) $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

2. Aufgabe : Klassifizieren (Dimension des Vektorraums aus dem sie stammen, "Form") Sie die folgenden Matrizen :

i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Es handelt sich hier um die *Einheitsmatrix* aus dem 9 dimensionalen Raum der Matrizen, sie ist :
· diagonal, reel
⇒ symmetrisch, obere Dreiecksmatrix,selbstadjungiert

ii) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 7 & 2 & 7 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

Die Matrix ist aus dem 9 dimensionalen Raum der Matrizen, sie ist :
· symmetrisch, reel
⇒ selbstadjungiert

iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2i & 2 \\ -2i & 6 & -4i \\ 2 & 4i & 4 \end{bmatrix}$

Die Matrix ist aus dem 9 dimensionalen Raum der Matrizen, sie ist :
· selbstadjungiert, komplex

iv) $\begin{bmatrix} 0 & 2i & -2 & -7 \\ -2i & 0 & -4i & -3i \\ 2 & 4i & 0 & 4 \\ 7 & 3i & -4 & 0 \end{bmatrix}$

Die Matrix ist aus dem 16 dimensionalen Raum der quadratischen Matrizen, sie ist :
· antisymmetrisch, komplex

3. Aufgabe : Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf Orthogonalität und Unitärität :

i) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Einheitsmatrix ist also sowohl unitär als auch orthogonal.

ii) $$\begin{bmatrix}1&7&5\\7&2&7\\5&7&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&7&5\\7&2&7\\5&7&3\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1&7&5\\7&2&7\\5&7&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&7&5\\7&2&7\\5&7&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}75&56&69\\56&102&70\\69&70&83\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&7&5\\7&2&7\\5&7&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&7&5\\7&2&7\\5&7&3\end{bmatrix}^*=\begin{bmatrix}1&7&5\\7&2&7\\5&7&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&7&5\\7&2&7\\5&7&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}75&56&69\\56&102&70\\69&70&83\end{bmatrix}$$

Die Matrix von Aufgabenteil *ii*) ist also weder unitär noch orthogonal.

iii) $$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}^*=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

Die Matrix von Aufgabenteil *iii*) ist also sowohl unitär als auch orthogonal.

iv) $$\begin{bmatrix}1&2i&2\\-2i&6&-4i\\2&4i&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2i&2\\-2i&6&-4i\\2&4i&4\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1&2i&2\\-2i&6&-4i\\2&4i&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2i&2\\2i&6&4i\\2&-4i&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2i&2\\2i&16&4i\\2&4i&4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2i&2\\-2i&6&-4i\\2&4i&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2i&2\\-2i&6&-4i\\2&4i&4\end{bmatrix}^*=\begin{bmatrix}1&2i&2\\-2i&6&-4i\\2&4i&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2i&2\\-2i&6&-4i\\2&4i&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&22i&18\\-22i&56&-44i\\18&44i&36\end{bmatrix}$$

Die Matrix von Aufgabenteil *iv*) ist also weder orthogonal noch unitär.

v) $$\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}^*=\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-i\\-i&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

Die Matrix aus Aufgabenteil *v*) ist also unitär aber nicht orthogonal.

vi) $$\begin{bmatrix} 0 & 2i & -2 & -7 \\ -2i & 0 & -4i & -3i \\ 2 & 4i & 0 & 4 \\ 7 & 3i & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2i & -2 & -7 \\ -2i & 0 & -4i & -3i \\ 2 & 4i & 0 & 4 \\ 7 & 3i & -4 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2i & -2 & -7 \\ -2i & 0 & -4i & -3i \\ 2 & 4i & 0 & 4 \\ 7 & 3i & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2i & 2 & 7 \\ 2i & 0 & 4i & 3i \\ -2 & -4i & 0 & -4 \\ -7 & -3i & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 49 & 29i & -36 & 2 \\ 29i & -29 & -16i & 2i \\ -36 & -16i & 4 & 2 \\ 2 & 2i & 2 & 56 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2i & -2 & -7 \\ -2i & 0 & -4i & -3i \\ 2 & 4i & 0 & 4 \\ 7 & 3i & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2i & -2 & -7 \\ -2i & 0 & -4i & -3i \\ 2 & 4i & 0 & 4 \\ 7 & 3i & -4 & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 0 & 2i & -2 & -7 \\ -2i & 0 & -4i & -3i \\ 2 & 4i & 0 & 4 \\ 7 & 3i & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2i & 2 & 7 \\ -2i & 0 & -4i & -3i \\ -2 & 4i & 0 & -4 \\ -7 & 3i & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 57 & -29i & -20 & 14 \\ 29i & 29 & -16i & 2i \\ -20 & 16i & 36 & 26 \\ 14 & -2i & 26 & 74 \end{bmatrix}$$

Die Matrix aus Aufgabenteil *vi)* ist also weder unitär noch orthogonal.

4. Aufgabe : Die Lösungen sind gegeben durch :

i) $A_i = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ii) $A_{ii} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 8 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ iii) $A_{iii} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$

iv) $A_{iv} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 7 & 2 & 7 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ v) $A_v = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ vi) $A_{vi} = \begin{bmatrix} 1 & 2i & -2 \\ 0 & 6 & -4i \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

vii) $A_{vii} = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$ viii) $A_{viii} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix}$