Matrizen

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
☐	☐	Seien $A,\ B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt $A\ B = B\ A$.
☐	☐	Addition und Multiplikation von oberen Dreiecksmatrizen sind wider obere Dreiecksmatrizen.
☐	☐	Symmetrische Matrizen sind selbst adjungiert.
☐	☐	Der Kern von linearen Abbildungen ist ein linearer Teilraum des Urbildraumes.
☐	☐	Orthogonale Matrizen sind invertierbar.

1. Aufgabe : Bestimmen Sie die folgenden Matrixprodukte und -summen :

i) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 2\end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 4 & 2 & 6\end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}$

iv) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 6\\ 8 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$ v) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 8\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ vi) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

2. Aufgabe : Klassifizieren (Dimension des Vektorraums aus dem sie stammen, "Form") Sie die folgenden Matrizen :

i) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix}1 & 7 & 5\\ 7 & 2 & 7\\ 5 & 7 & 3\end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix}1 & 2i & 2\\ -2i & 6 & -4i\\ 2 & 4i & 4\end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix}0 & 2i & -2 & -7\\ -2i & 0 & -4i & -3i\\ 2 & 4i & 0 & 4\\ 7 & 3i & -4 & 0\end{bmatrix}$

3. Aufgabe : Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf Orthogonalität und Unitärität :

i) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix}1 & 7 & 5\\ 7 & 2 & 7\\ 5 & 7 & 3\end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix}1 & 2i & 2\\ -2i & 6 & -4i\\ 2 & 4i & 4\end{bmatrix}$

v) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ iv) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+i & 1-i\\ 1-i & 1+i\end{bmatrix}$ v) $\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}$ vi) $\begin{bmatrix}0 & 2i & -2 & -7\\ -2i & 0 & -4i & -3i\\ 2 & 4i & 0 & 4\\ 7 & 3i & -4 & 0\end{bmatrix}$

4. Aufgabe : Bestimmen Sie für die folgenden Abbildungen, die *Abbildungsmatrix* :

i) $L_{A_i} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a + 2b \\ 3a + 4b \end{bmatrix}$

ii) $L_{A_{ii}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a - b \\ 8b \\ 3a \end{bmatrix}$

iii) $L_{A_{iii}} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a + 5b - 3d \\ a - 2b - 7c + 3d \end{bmatrix}$

iv) $L_{A_{iv}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a + 7b + 5c \\ 7a + 2b + 7c \\ 5a + 7b + 3c \end{bmatrix}$

v) $L_{A_v} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} ib \\ ia \end{bmatrix}$

vi) $L_{A_{vi}} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 : \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a + 2ib - 2c \\ 6b - 4ic \\ 4c \end{bmatrix}$

vii) $L_{A_{vii}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} xa - yb \\ ya + xb \end{bmatrix}$

viii) $L_{A_{viii}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos(\alpha)a - \sin(\alpha)b \\ \sin(\alpha)a + \cos(\alpha)b \end{bmatrix}$ *mit* $\alpha \in [0, 2\pi)$