Orthogonale und unitäre Abbildungen - Lösung

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
☒	☐	Eine lineare Abbildung $R : V \to V$, wobei V ein eidlicher, euklidischer Vektorraum ist, heißt orthogonal falls : $\langle R\vec{x}, R\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$
☒	☐	Rotationen und Spiegelungen an einer Ursprungsgeraden sind orthogonale Abbildungen.
☐	☒	Kompositionen orthogonaler Abbildungen müssen nicht orthogonal sein.
☐	☒	Die Q-R-Zerlegung einer Matrix ist eindeutig.
☒	☐	Die Q-R-Zerlegung einer invertierbaren Matrix ist eindeutig.

1./ 2. Aufgabe : Die Permutationsmatrizen sind orthogonal.

Beweis : Wir betrachten im Folgenden immer das Standardskalarprodukt. Weiter bezeichnet P_σ eine beliebige Permutationsmatrix der Permutation σ. Dann gilt :

$$\langle P_\sigma \vec{x}, P_\sigma \vec{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} y_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle.$$

Folglich sind alle Permutationsmatrizen orthogonal bzgl. des Standardskalarprodukts.

3. Aufgabe : Die gefragten Eigenschaften folgen aus der Definition der Norm :

a) $||F(v)|| = \sqrt{\langle F(v), F(v)\rangle} = \sqrt{\langle v, v\rangle} = ||v||$
b) $\langle F(v), F(w)\rangle = \langle v, w\rangle = 0$

4. Aufgabe : Beweis : Sei $A := M_{\mathfrak{B}}(F) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\vec{v},\ \vec{w} \in V$ seien $\vec{x},\ \vec{y}$ die Koordinatenvektoren. Da $\mathfrak{B}$ orthonormal ist, folgt $\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = \vec{x}^T \vec{y}$, wobei $\vec{x},\ \vec{y}$ Spaltenvektoren in $\mathbb{R}^n$ sind. Ist nun F orthogonal, so ist $(M_{\mathfrak{B}}(F)\vec{x})^T M_{\mathfrak{B}}(F)\vec{y} = \langle F(\vec{v}), F(\vec{w})\rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = \vec{x}^T\vec{y}$. Ist $M_{\mathfrak{B}}(F)$ orthogonal, so ist $\langle F(\vec{v}), F(\vec{w})\rangle = (M_{\mathfrak{B}}(F)\vec{x})^T M_{\mathfrak{B}}(F)\vec{y} = \vec{x}^T\vec{y} = \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

5. Aufgabe :

a) Wir verwenden das Gram-Schmidt Verfahren :

i) $\vec{q}_1 = \frac{1}{||a_1||} a_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ii) $\vec{l}_2 = a_2 - \langle a_2, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{10}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

iii) $q_2 = \frac{1}{||\vec{l}_2||} \vec{l}_2 = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

iv) $\vec{l}_3 = \vec{e}_1 - \langle \vec{e}_1, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 - \langle \vec{e}_1, \vec{q}_2 \rangle \vec{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-3}{36} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

v) $\vec{q}_3 = \frac{1}{||\vec{l}_3||} \vec{l}_3 = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

vi) $\vec{l}_4 = \vec{e}_2 - \langle \vec{e}_2, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 - \langle \vec{e}_2, \vec{q}_2 \rangle \vec{q}_2 - \langle \vec{e}_2, \vec{q}_3 \rangle \vec{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-1}{36} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{-4}{24} \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

v) $\vec{q}_4 = \frac{1}{||\vec{l}_4||} \vec{l}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

vi) $Q = [q_1, q_2, q_3, q_4] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-3}{6} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{6} & \frac{-2}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{6} & \frac{-2}{3\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, \qquad R = Q^{-1}A = Q^T A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) Wir verwenden den Algorithmus der Housholdertransformation :

i) $$v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \\ a_{44} \end{bmatrix} + sgn(a_{11}) \; || \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \\ a_{44} \end{bmatrix} || \; \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ii) $$Q_1 = I_4 - \tfrac{2}{v_1^T v_1} v_1 v_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \tfrac{2}{12} \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 5 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

iii) $$A_1 = Q_1 \; A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

iv) $$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{(2)} \\ a_{32}^{(2)} \\ a_{42}^{(2)} \end{bmatrix} + sgn(a_{11}^{(2)}) \; || \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{(2)} \\ a_{32}^{(2)} \\ a_{42}^{(2)} \end{bmatrix} || \; \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

v) $$Q_2 = I_4 - \tfrac{2}{v_2^T v_2} v_2 v_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \tfrac{2}{18} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vi) $$A_2 = Q_2 \; A1 = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = R, \qquad und \qquad Q = (Q_2 \; Q_1)^T = \tfrac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & -1 & -1 & 5 \\ -3 & -1 & 5 & -1 \\ -3 & 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

c) Wir verwenden die Q-R-Zerlegung, die wir durch die Housholdertransformation erhalten haben. Es gilt :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{\not{z}}} ||Ax - b|| = \min_{x \in \mathbb{R}^{\not{z}}} ||Q^T Ax - Q^T b|| = \min_{x \in \mathbb{R}^{\not{z}}} ||Rx - Q^T b||,$$

6. Aufgabe : QR-Zerlegung einer Matrix A bedeutet, dass Q orthogonal, R obere Dreiecksmatrix und $A = QR$ gilt. Da Q orthogonal sein soll müssen die Spalten von Q, also insb. auch die ersten beiden Spalten orthogonal zueinander sein. Also

$$0 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \right\rangle = q$$

, d.h. $q = 0$. Da R obere Dreiecksmatrix ist , muss $r = 0$ sein. Die fehlenden Einträge von R kann man über Skalarprodukte berechnen :

$$s = r_{2,3} = \langle \vec{q}_2, \vec{a}_3 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ? \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix} \right\rangle = -\frac{8}{5} + \frac{33}{5} = 5$$

$$t = r_{3,3} = \langle \vec{q}_3, \vec{a}_3 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ? \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{6}{5} + \frac{44}{5} = 10$$