Orthogonale und unitäre Abbildungen

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
☐	☐	Eine lineare Abbildung $R : V \to V$, wobei V ein endlicher, euklidischer Vektorraum ist, heißt orthogonal falls : $\langle R\vec{x}, R\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$
☐	☐	Rotationen und Spiegelungen an einer Ursprungsgeraden sind orthogonale Abbildungen.
☐	☐	Kompositionen orthogonaler Abbildungen müssen nicht orthogonal sein.
☐	☐	Die Q-R-Zerlegung einer Matrix ist eindeutig.
☐	☐	Die Q-R-Zerlegung einer invertierbaren Matrix ist eindeutig.

1. Aufgabe : Sei $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ eine Menge mit n Elementen, dann ist eine n-stellige Permutation (ohne Wiederholung) eine bijektive Abbildung $\pi\colon X \to X$, die jedem Element der Menge ein Element der gleichen Menge zuordnet. Betrachten Sie die folgenden Permutationsmatrizen und entscheiden Sie welche orthogonal bzgl. des Standardskalarprodukts sind und welche nicht.

$$\text{a)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{b)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{c)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{d)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Aufgabe : Welchen Schluss ziehen Sie aus der Aufgabe 1 ? Beweisen Sie diesen.

3. Aufgabe : Sei $F : V \to V$ orthogonal, wobei V ein euklidischer Vektorraum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen :

a) $||F(v)|| = ||v||$, für alle $v \in V$.
b) $v \perp w \Rightarrow F(v) \perp F(w)$

4. Aufgabe : Beweisen Sie :
Ist V ein euklidischer Vektorraum mit einer Orthonormalbasis $\mathfrak{B}$ und $F : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann gilt :

$$F \textit{ ist orthogonal} \Leftrightarrow M_{\mathfrak{B}}(F) \textit{ ist orthogonal},$$

wobei $M_{\mathfrak{B}}(F)$ die Darstellungsmatrix von F bzgl. der Basis $\mathfrak{B}$ ist.

5. Aufgabe : Wir betrachten die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Bestimmen Sie eine zugehörige Q-R-Zerlegung, mit Gram-Schmidt

b) Bestimmen Sie eine zugehörige Q-R-Zerlegung, mit Householder

c) Gegeben sei der Vektor $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Lösen Sie mit der Q-R-Zerlegung das Minimierungsproblem $\min_{x \in \mathbb{R}^2} ||A\vec{x} - \vec{b}||$ so, dass der Lösungsvektor $\vec{x}$ die minimale Norm besitzt

6. Aufgabe : Zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sind Matrizen $Q = \begin{bmatrix} 1 & q & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ und $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & s \\ r & 0 & t \end{bmatrix}$ gegeben. Von A sind die Einträge $a_{2,3} = 2$ und $a_{3,3} = 11$ bekannt. Bestimmen Sie $q,\ r,\ s,\ t \in \mathbb{R}$ so, dass Sie mit Q und R eine QR- Zerlegung von A erhalten.