Vektorräume - Lösung

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
☒	☐	Eine Menge von Vektoren $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}\}$ mit $\vec{v_i} \in \mathbb{R}^n,\ i = 1, ..., n$ heißt linear unabhängig falls : $\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + ... + \lambda_n\vec{v_n} = \vec{0} \ \Rightarrow\ \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$
☐	☒	Der $\mathbb{R}^2$ Vektorraum ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$
☒	☐	Ein Vektorraum der Dimension n hat genau n Basiselemente
☐	☒	Der $\mathbb{R}^n$ hat genau eine Basis
☐	☒	Jedes Erzeugendensystem ist eine Basis

1. Aufgabe : Welche der folgenden Mengen sind Basen des $\mathbb{R}^3$?

i) $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ ii) $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ iii) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ iv) $\left\{\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\3\\-5\end{bmatrix}\right\}$

Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ist von der Dimension 3. Eine notwendige Bedingung dafür, dass eine Menge von Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist, ist also, dass sie genau 3 Elemente hat. Folglich kann $i)$ keine Basis des $\mathbb{R}^3$ sein. Es Bleibt zu überprüfen ob die Mengen $ii),\ iii),\ iv)$ linear unabhängige Elemente haben.

$ii)$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\lambda_1+0+0\\0+\lambda_2+0\\0+0+\lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$iii)$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\lambda_1+0+0\\\lambda_1+\lambda_2+0\\\lambda_1+0+\lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_1+\lambda_2\\\lambda_1+\lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 = 0\\ \lambda_1+\lambda_2 = \lambda_2 = 0\\ \lambda_1+\lambda_3 = \lambda_3 = 0\end{cases}$$

$iv)$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix}-1\\3\\-5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3\\3\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3\\\lambda_1+2\lambda_2-5\lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda_1 = \lambda_3 - \lambda_2\\ 3(\lambda_3-\lambda_2)+\lambda_2+3\lambda_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = 3\lambda_3\\ (\lambda_3-(3\lambda_3))+2(3\lambda_3)-5\lambda_3 \Leftrightarrow \lambda_3 = 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Es sind also alle drei Mengen $ii),\ iii),\ iv)$ Basen des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$.

2. Aufgabe : Wir betrachten im Folgenden die lineare Hülle :

$$span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\\6\end{bmatrix}\right\}$$

Welche der folgenden Vektoren liegen in dieser linearen Hülle?

i) $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\\6\end{bmatrix}$

ii) $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\\6\end{bmatrix}$

iii) $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\\6\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_2 = 1\\ -\frac{1}{2} = \lambda_1 = -\frac{5}{3}\ \lightning\end{cases}$

iv) $\begin{bmatrix}8\\4\\30\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\\6\end{bmatrix}$

v) $\begin{bmatrix}3\\1\\7\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\\6\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_2 = 1\\ \frac{3}{2} = \lambda_1 = \frac{1}{3}\ \lightning\end{cases}$

vi) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{7}{2}\\3\\15\end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\\6\end{bmatrix}$

3. Aufgabe : Für welche $a,\ b \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig?

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

Seien $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann betrachten wir das folgende System :

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 + \lambda_2 a\\ \lambda_2 b\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 = -\lambda_2 a\\ \lambda_2 b = 0\end{cases} \Rightarrow \lambda_2 = 0\ oder\ b = 0$$

$$(I)\ b = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_2 \in \mathbb{R}\ also\ auch\ \lambda_2 \neq 0\ ist\ erlaubt$$
$$(II)\ b \neq 0$$
$$\Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow 0 = -\lambda_2 a = \lambda_1$$

Wir stellen also fest, dass die Vektoren v_1 und v_2 linear unabhängig sind genau dann, wenn $b \neq 0$ gilt.

4. Aufgabe Bestimmen Sie jeweils die lineare Hülle und skizzieren Sie diese :

i) $v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ ii) $\omega_1 = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix},\ \omega_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ iii) $\xi_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ \xi_2 = \begin{bmatrix}\pi\\0\end{bmatrix}$

i) $span(v_1) = \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{\begin{bmatrix}\lambda\\0\end{bmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

ii) $span(\omega_1, \omega_2) = \{\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \left\{\begin{bmatrix}2\lambda_1 + \lambda_2\\ \lambda_2\end{bmatrix} | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^2$

iii) $span(\xi_1, \xi_2) = \{\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \left\{\begin{bmatrix}\lambda_1 + \lambda_2\pi\\ 0\end{bmatrix} | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\}$

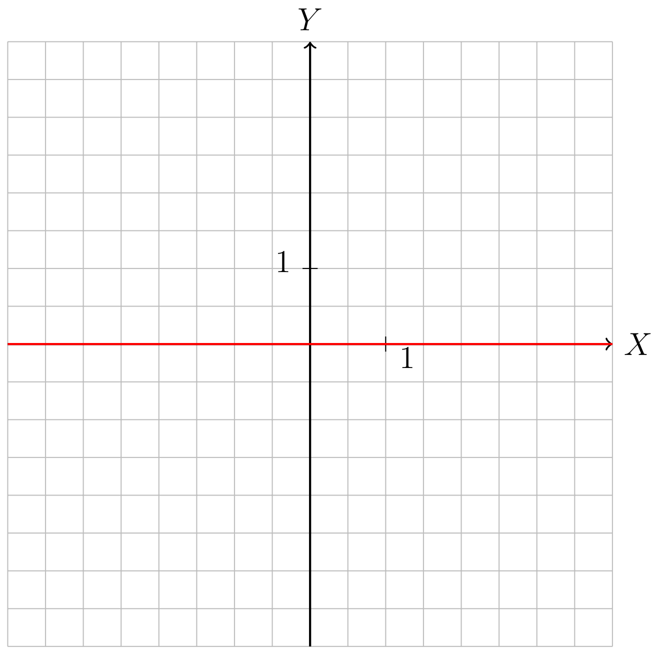

FIGURE 1 – Die obige Abbildung zeigt den Span von Aufgabenteil *i*) und *iii*).

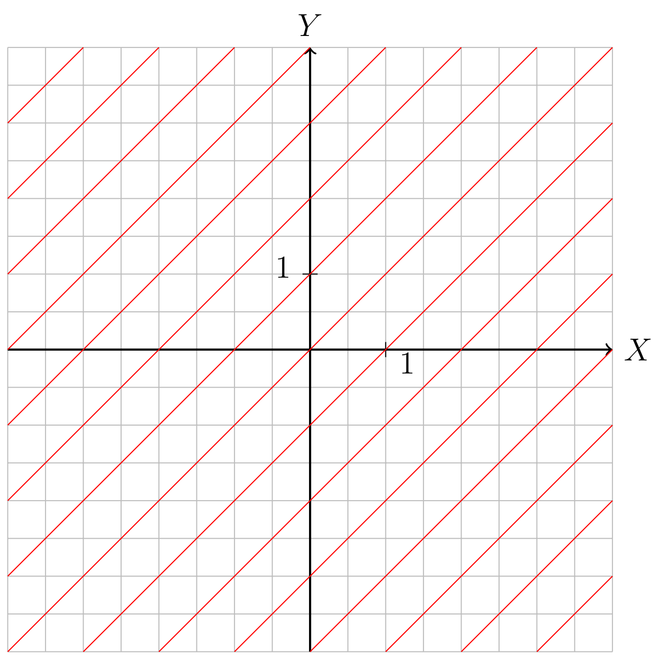

FIGURE 2 – Die obige Abbildung zeigt den Span von Aufgabenteil *ii*).

5. Aufgabe : Wir betrachten :

$$\mathcal{B} := \left\{ \vec{v_1} := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v_2} := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v_3} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Wählen Sie $\vec{v_3}$ so, dass $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. (Klausur 02.2011 - 2. Aufgabe)

Lösung : Wir sehen hier, dass der Vektor $\vec{v_1}$ in der Y-Achse und der Vektor $\vec{v_2}$ in der X-Z-Ebene liegt. Da $\vec{v_1}$ in einer Achse liegt, können wir das obige Problem darauf reduzieren einen Vektor zu finden der zusammen mit $\vec{v_2}$ die X-Z-Ebene aufspannt. Dies erfüllt jedoch jeder Vektor der nicht im span von $\vec{v_2}$ liegt. Wir wählen also z.B. $\vec{v_3} = (1, 0, 0)^T$ und haben, damit $\mathcal{B}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ gemacht (dies zeigt man analog zur 1. Aufgabe). Wie man **alle** Lösungen zu diesem Problem finden kann und einfach berechnen kann sehen werden wir sehen, wenn wir Determinanten von Abbildungen betrachten.

6. Aufgabe Gegeben sei der Teilraum $V := \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 | a + c = 0 \right\}$ des $\mathbb{R}^3$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt und die Menge $\mathcal{M} := \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

Geben Sie eine Teilmenge $\mathcal{N}$ von $\mathcal{M}$ an, sodass $\mathcal{N}$ eine Basis von V ist. Zeigen Sie, dass Ihre gewählte Menge $\mathcal{N}$ eine Basis von V ist.(Klausur 07.2011 - 3. Aufgabe)

Lösung : Betrachten wir den Teilraum V (Figure 3) der in der Aufgabe beschrieben wird, so stellen wir fest, dass er eine Ebene beschreibt, die in der a-c-Ebene steht. Da es sich um einen 2-dimensionalen Teilraum handelt, reiht es zwei Vektoren zu finden, die linear unabhängig sind und in der Ebene liegen. Wir erkennen, dass die Vektoren $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ in dem Teilraum V liegen und wir können uns analog zu den obigen Aufgaben davon überzeugen, dass beide linear unabhängig sind. Damit haben wir eine Basis das Teilraumes V aus $\mathcal{M}$ ausgewählt.

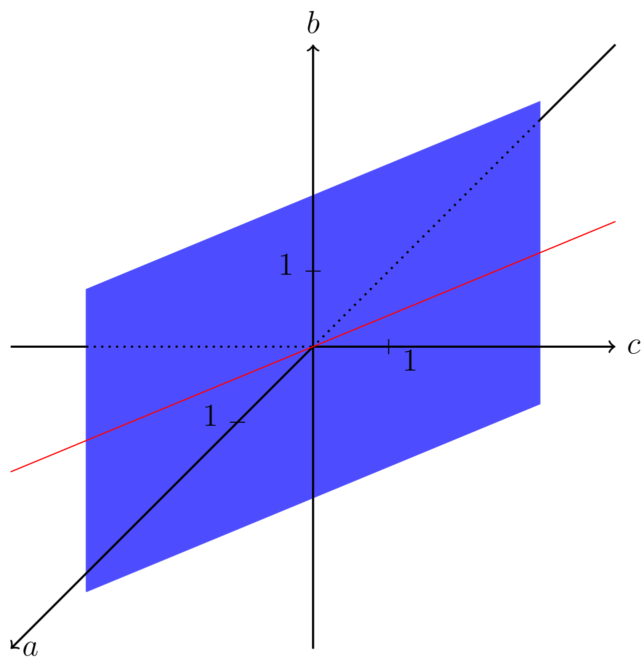

FIGURE 3 – Die obige Abbildung zeigt den Teilraum V der Aufgabe 6.