1 Vektorräume

Selbsttest : Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

Wahr	Falsch	Aufgabe
☐	☐	Eine Menge von Vektoren $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}\}$ mit $\vec{v_i} \in \mathbb{R}^n,\ i = 1, ..., n$ heißt linear unabhängig falls : $\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + ... + \lambda_n\vec{v_n} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$
☐	☐	Der $\mathbb{R}^2$ Vektorraum ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$
☐	☐	Ein Vektorraum der Dimension n hat genau n Basiselemente
☐	☐	Der $\mathbb{R}^n$ hat genau eine Basis
☐	☐	Jedes Erzeugendensystem ist eine Basis

1. Aufgabe : Welche der folgenden Mengen sind Basen des $\mathbb{R}^3$?

i) $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ ii) $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ iii) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ iv) $\left\{\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\3\\-5\end{bmatrix}\right\}$

2. Aufgabe : Wir betrachten im Folgenden die lineare Hülle :

$$span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\\6\end{bmatrix}\right\}$$

Welche der folgenden Vektoren liegen in dieser linearen Hülle ?

i) $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix}8\\4\\30\end{bmatrix}$ v) $\begin{bmatrix}3\\1\\7\end{bmatrix}$ vi) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{7}{2}\\3\\15\end{bmatrix}$

3. Aufgabe : Für welche $a,\ b \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig ?

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

4. Aufgabe Bestimmen Sie jeweils die lineare Hülle und skizzieren Sie diese :

i) $v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ ii) $\omega_1 = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix},\ \omega_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ iii) $\xi_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ \xi_2 = \begin{bmatrix}\pi\\0\end{bmatrix}$

5. Aufgabe : Wir betrachten :

$$\mathcal{B} := \left\{ \vec{v_1} := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v_2} := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v_3} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Wählen Sie $\vec{v_3}$ so, dass $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. (Klausur 02.2011 - 2. Aufgabe)

6. Aufgabe Gegeben sei der Teilraum $V := \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 | a + c = 0 \right\}$ des $\mathbb{R}^3$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt und die Menge $\mathcal{M} := \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.
Geben Sie eine Teilmenge $\mathcal{N}$ von $\mathcal{M}$ an, sodass $\mathcal{N}$ eine Basis von V ist. Zeigen Sie, dass Ihre gewählte Menge $\mathcal{N}$ eine Basis von V ist.(Klausur 07.2011 - 3. Aufgabe)

Aufgaben für nächste Woche : Es ist mindestens eine der folgenden beiden Aufgaben zu dem Fachmentorium 3 vorzubereiten.

i) Beweisen Sie :
Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine antisymmetrische Matrix. Dann ist $a_{i,i} = 0$ mit $i = 1, ..., n$.

ii) Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ beschreibt eine Abbildung $L_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : X \mapsto AX$. Beweisen Sie, dass diese Abbildung linear ist.