# Lineare Abbildungen

**Selbsttest :** Kreuzen Sie im Folgenden das Zutreffende an :

| Wahr | Falsch | Aufgabe |
|---|---|---|
| ☐ | ☐ | $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ ist eine lineare Abbildung |
| ☐ | ☐ | Jede injektive Abbildung kann durch Einschränkung des Bildraumes zu einer bijektiven Abbildung gemacht werden. |
| ☐ | ☐ | $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto ax + b$ ist eine lineare Abbildung. |
| ☐ | ☐ | Seien $V$ und $W$ Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $L$ eine lineare Abbildung von $V$ nach $W$. Falls $V$ endlichdimensional ist gilt die Gleichung : $dim(Ker(L)) + dim(Im(L)) = dim(V)$ |
| ☐ | ☐ | Die Komposition linearer Abbildungen ist wieder eine lineare Abbildung. |

**1. Aufgabe :** Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität :

i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto ax + b$

ii) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$(x, y, z) \mapsto (x - y, x - y)$

iii) $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, mit $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-V.R.
$z \mapsto \overline{z}$

iv) $f_4 : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$
$\phi \mapsto \phi'$

v) $f_4 : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
$\phi \mapsto \int_0^x \phi$

vi) $f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto (x - y, 1 + y)$

**2. Aufgabe :** Untersuchen Sie die obigen Abbildungen auf die Eigenschaften : Injektivität, Surjektivität, Bijektivität.

**3.Aufgabe :** Sei $L_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix $A$. Beweisen Sie :

i) Ist Rang($A$)$= m$, so ist die Abbildung injektiv.
ii) Ist Rang($A$)$= n$, so ist die Abbildung surjektiv.

**4. Aufgabe :** Bestimmen Sie zu den Abbildungen der Aufgabe (1) mit Hilfe des Dimensionssatzes die Dimension von Bild und Kern.

**5. Aufgabe :** Zeigen Sie, dass die Komposition von linearen Abbildungen wieder eine lineare Abbildung ist.